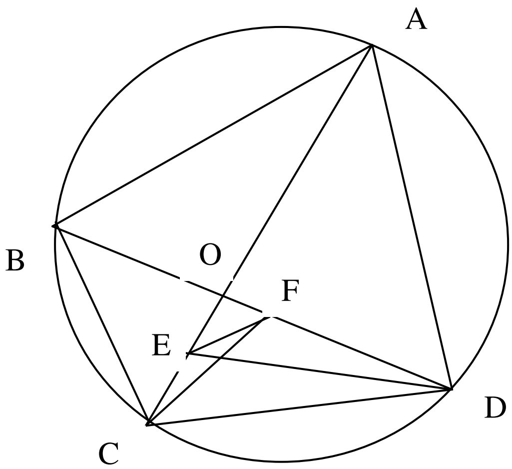
CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $E \in (OC)$ și $F \in (BD)$, să se demonstreze că $EF \parallel AB$ dacă și numai dacă $\angle ADE \equiv \angle BCF$.



Presupunem că EF∥AB, atunci $D\hat{E}F \equiv B\hat{A}O$ (1) 1p

ABCD inscriptibil $\Rightarrow$ $B\hat{A}O \equiv B\hat{D}C$ (2) 0,5p

Din (1) și (2) rezultă $B\hat{D}C \equiv O\hat{E}F$ ceea ce conduce la faptul că patrulaterul DCEF este inscriptibil, deci $E\hat{D}F \equiv E\hat{C}F$ (3) 1,5p

Cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$, împreună cu (3) dă $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ 0,5p

Reciproc. Avem $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ (4), cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$ (5) 0,5p

se ajunge la $E\hat{C}F \equiv E\hat{D}F$ și rezultă că CDEF este inscriptibil

Prin urmare $C\hat{D}B \equiv O\hat{E}F$ 2p

Din $B\hat{D}C \equiv B\hat{A}C \Rightarrow O\hat{E}F \equiv B\hat{A}D$ și așa rezultă EF∥AB 1p

2. Demonstrați că pentru orice n număr natural are loc inegalitatea

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Ridicăm la pătrat fiecare membru al inegalității: 1p

$$n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2\sqrt{1+4n}+1+4n}{4}$$

$$n+\sqrt{n+\cdots\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2n+\sqrt{1+4n}}{2}, \textit{sau} \quad \sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$ 3p

Obs că membrul drept rămâne același. Ridicăm succesiv la pătrat și ajungem la 1p

$\sqrt{n} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} \Leftrightarrow 0 \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$, inegalitate evidentă. Prin urmare relația este adevărată. 2p

3. Fie a și n două numere naturale nenule. Arătați că numărul

$x_n(a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{12n-1}$ **se divide prin** $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$.

Grupăm câte patru termeni : 1p

$$x_n(a) = (1+a+a^2+a^3) + a^4(1+a+a^2+a^3) + \ldots + a^{12n-4}(1+a+a^2+a^3) =$$
$$= (a+1)(a^2+1)(1+a^4+a^8+\ldots+a^{12n-4}) = (a+1)(a^2+1)\,y_n(a)$$ 2p

În $y_n(a)$ grupăm câte 3 termeni și avem: 1p

$$y_n(a) = 1 + a^4 + a^8 + a^{12}(1+a^4+a^8) + \ldots + a^{12n-12}(1+a^4+a^8) =$$ 1p

$$= (1+a^4+a^8)(1+a^{12}+\ldots+a^{12n-12}) = (1+a^4+a^8)\,z_n(a)$$ 1p

Deci $x_n(a) = (a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)\,z_n(a)$ ceea ce arată că

$x_n(a)$ este divizibil cu $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$. 1p