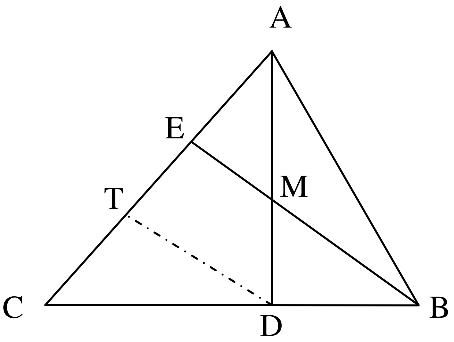
CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. În triunghiul *ABC*, *M* este mijlocul înălțimii *AD* ($D \in (BC)$), iar $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2AE$. Arătați că punctele *B, M, E* sunt coliniare dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.



Considerăm B, M și E sunt coliniare și construim $DT \| BE$ 1p

Atunci în ΔADT, ME este linie mijl. și $ET = AE = \frac{1}{2} EC$ 0,5p

De unde avem că T e mijlocul lui EC, adică DT linie mijlocie în ΔBCE și atunci D e mijlocul lui BC. 1p

Cum AD e înălțime și mediană, avem triunghi isoscel, adică $[AB] \equiv [AC]$. 1p

Reciproc; presupunem că $[AB] \equiv [AC]$, adică triunghiul ΔABC este isoscel. Cum AD este înălțime va fi și mediană, adică D este mijlocul lui BC. 1,5p

Construim $DT \| BE$ $\Rightarrow$ DT linie mijlocie în ΔBEC, T fiind mijlocul lui EC $\Rightarrow$ TE=AE 1p

Deci în ΔADT, ME este linie mijlocie și atunci $DT \| ME$. Dar prin E avem o singură paralelă la DT.

Prin urmare B, M și E coliniare. 1p

2. Să se determine *a, b* $\in$ N știind că 1997 împărțit la *a* dă restul 2*b*-*a* și împărțit la *b* dă restul 2*a*-10.

Resturile sunt numere naturale sunt numere naturale, deci $2a - 10 \geq 0$, $2b - 9 \geq 0$ de unde avem că $a \geq 5$ și $b \geq 5$. 1p

Cum restul e mai mic decât împărțitorul, $2b - 9 \angle a$ *iar* $2a - 10 \angle b$ 1p

Atunci b>2a-10>2(2b-9)-10 $\Rightarrow$b>4b-28$\Rightarrow$3b<28 adică $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 1p

În plus, b nu poate fi par (restul împ. lui 1997 la b este 2a-10 care este par) deci $b \in \{5, 7, 9\}$ 1p

Dacă b=5, avem 1997=5·399+2, adică a=6 și cum 1997=6·332+5, 2b-9=5 adică b=7≠5. Valoarea nu convine 1p

Dacă b=7, avem 1997=7·285+2, adică a=6, din nou 1997=6·332+5, 2b-9=5 adică b=7, deci a=6 și b=7 1p

Dacă b=9, avem 1997=9·221+8, adică a=9. Avem 1997=9·221+8 adică 2b-9=8, imposibil.

În concluzie a=6 și b=7. 1p

3. Dacă *x, y, z, t* sunt numere reale, atunci

$$(-x + y + z + t)^2 + (x - y + z + t)^2 + (x + y - z + t)^2 + (x + y + z - t)^2 + \frac{1}{4} \geq x + y + z + t$$

Precizați cazul de egalitate.

După ridicările la pătrat, se obține inegalitatea $4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - x - y - z - t + \frac{1}{4} \geq 0$ 2p

care este echivalentă cu $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2z - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2t - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ ineg evidentă 4p

Pentru $x = y = z = t = \frac{1}{8}$ se realizează egalitatea 1p