PRIMUL TEST DE CALIFICARE PENTRU EGMO 2020
București, 16 noiembrie 2019
Soluții

Problema 1. Decideți dacă pentru orice numere naturale nenule a, b, c există numerele naturale A, B, C, distincte două câte două și mai mari ca 2019, astfel încât ABC să fie divizibil cu $A+a$, cu $B+b$ și cu $C+c$.

Soluție. Răspuns: Există.

Putem să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a \leqslant b \leqslant c$. Este suficient să găsim $0 < A' < B' < C'$ astfel încât $A'B'C'$ să fie divizibil cu $A'+1$, cu $B'+1$ și cu $C'+1$. În acest caz, luând $A = aA'$, $B = bB'$, $C = cC'$, reiese $A+a = a(A'+1) \mid aA'B'C' \mid ABC$ și analoagele, iar $A < B < C$.

Fie $t > 2019$. Luăm $A' = 2t$, $B' = 4t+1$, $C' = A'B' - 1 = 8t^2 + 2t - 1 = (4t-1)(2t+1)$. Atunci $A'+1 = 2t+1 \mid C' \mid A'B'C'$, $B'+1 = 2(2t+1) \mid 2C' \mid A'B'C'$ și $C'+1 = A'B' \mid A'B'C'$.

Problema 2. Arătați că dacă o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $|f(x+y)| \geqslant |f(x)+f(y)|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, atunci ea satisface și $|f(x+y)| = |f(x)+f(y)|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Rămâne adevărată afirmația precedentă dacă inversăm sensul inegalității din ipoteză?

Soluție. Pentru $x = y = 0$, ipoteza dă $f(0) = 0$. Apoi, $y = -x$ duce la $|f(x)+f(-x)| \leqslant 0$, deci $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Să observăm acum că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

(1)
$$f^2(x) = f^2((x-y)+y) \geqslant (f(x-y)+f(y))^2$$
(2)
$$f^2(y) = f^2((y-x)+x) \geqslant (f(x)-f(x-y))^2$$
(3)
$$f^2(x-y) = f^2(x+(-y)) \geqslant (f(x)-f(y))^2$$

Prin adunare obținem, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(x-y) \geqslant \big(f(x-y)+f(y)\big)^2$$

$$+\big(f(x)-f(x-y)\big)^2 + \big(f(x)-f(y)\big)^2.$$

Pe de altă parte, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$,

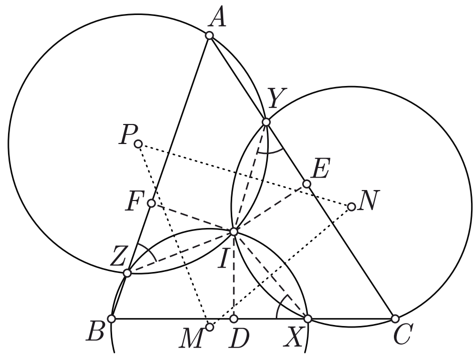
$$(b+c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

(inegalitatea se reduce la $(a-b-c)^2 \geq 0$). Astfel, în inegalitățile (1), (2), (3) avem egalitate, de unde concluzia.

Dacă inversăm sensul inegalității din ipoteză, concluzia nu mai rămâne adevărată: avem exemplul $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ Funcția are doar valori nenegative și dacă ambele variabile sunt nenegative, avem $f(x+y) = x+y = f(x)+f(y)$, iar dacă cel puțin o variabilă – e.g. x – este negativă, folosind monotonia funcției, avem $f(x+y) \leqslant f(y) = f(y)+f(x)$.

Pe de altă parte $f(1+(-1)) = 0 \neq 1 = f(1)+f(-1)$.

Problema 3. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se iau punctele Z, X, respectiv Y astfel încât $AZ - AY = BX - BZ = CY - CX$. Fie P, M, N centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AYZ, BZX, respectiv CXY. Arătați că triunghiurile ABC și MNP au același centru al cercului înscris.



Soluție. Fie $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ contactele cercului înscris în ΔABC cu laturile acestuia. Atunci $AY + BX = AZ + BZ = AB = AE + BD$, de unde $DX = EY$ și analoagele; în plus $X \in (DC)$, $Y \in (EA)$, $Z \in (FB)$, sau $X \in (DB)$, $Y \in (EC)$, $Z \in (FA)$.

Fie I centrul cercului înscris în ΔABC. Folosind $DX = EY = FZ$ reiese $\Delta IDX \equiv \Delta IEY \equiv \Delta IFZ$, de unde $\angle IXD = \angle IYE = \angle IZF$, ceea ce arată că patrulaterele $AYIZ$, $BZIX$ și $CXIY$ sunt inscriptibile.

Distanțele de la I la MN, NP, PM sunt $IX/2$, $IY/2$, respectiv $IZ/2$ și $IX = IY = IZ$, deci I este egal depărtat de laturile ΔMNP. În plus, ca urmare a poziției punctelor X, Y, Z, $\angle XIY + \angle YIZ + \angle ZIX = \angle DIE + \angle EIF + \angle FID = 360°$, deci I este în interiorul ΔXYZ. Cum MN, NP, PM sunt mediatoarele segmentelor IX, IY, respectiv IZ, deducem că I este în interiorul triunghiului MNP. Din cele de mai sus rezultă concluzia.

Problema 4. Determinați cel mai mare număr natural A cu proprietatea:

> *oricum am așeza în cele* 100 *de căsuțe ale unei table* 10×10 *numerele* $1, 2, 3, \ldots, 100$, *astfel încât fiecare număr apare exact o dată, găsim două numere situate pe aceași linie sau pe aceeași coloană astfel încât diferența lor să fie cel puțin* A.

Soluție. Răspuns: 54.
O așezare care arată că $A \leqslant 54$ este cea în care linia $i+1$, $0 \leqslant i \leqslant 9$, este

$$5i+1, 5i+2, \ldots, 5i+5, 5i+51, 5i+52, \ldots, 5i+55.$$

În această așezare, cea mai mare diferență dintre două numere de pe aceeași linie este 54, iar cea mai mare diferență dintre două numere de pe aceeași coloană este 45.

Să arătăm acum că pentru orice așezare găsim două numere pe același rând (linie sau coloană) cu diferența cel puțin 54. Pentru aceasta, observăm că pentru a așeza N numere este nevoie să folosim cel puțin $2\sqrt{N}$ rânduri: dacă folosim c coloane și l linii, atunci avem cel mult $cl \leqslant \frac{1}{4}(c+l)^2$ numere, iar $N \leqslant cl$ implică $c+l \geqslant 2\sqrt{N}$.

Astfel, pentru numerele din mulțimea $X = \{1, 2, \ldots, 26\}$ trebuie să folosim cel puțin $2\sqrt{26} > 10$ rânduri, iar pentru numerele din mulțimea $Y = \{80, 81, \ldots, 100\}$ trebuie să folosim cel puțin $2\sqrt{21} > 9$ rânduri. Rezultă că există un rând care conține un număr din X și un număr din Y, deci un rând cu o diferență $\geqslant 54$.

REZULTATELE TESTULUI DE SELECTIE PENTRU ECHIPA ROMANIEI CE VA PARTICIPA LA EGMO 2020

BUCURESTI, 16 NOIEMBRIE 2019

Nr.crt.	Numele si prenumele	Unitatea de provenienta	Sub.1	Sub.2	Sub.3	Sub.4	TOTAL	Obs.
1	TIMOFTE ALEXANDRA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	7	7	6	7	**27**	calificat
2	BOGDAN ANA MARIA IULIA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	2	7	6	0	**15**	calificat
3	RISNOVEANU LUCIA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ CONSTANŢA	7	7	1	0	**15**	calificat
4	COSTEA TEODORA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ CONSTANŢA	0	5	6	0	**11**	calificat
5	CRUTAN EVA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	5	6	0	**11**	calificat
6	ABU SHANAB AMINA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	2	5	3	0	**10**	calificat
7	AXENIE RAISA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	7	0	0	2	**9**	calificat
8	POPESCU IOANA	LICEUL TEORETIC ŞCOALA EUROPEANA	7	1	1	0	**9**	calificat
9	PETRUI CEZARA MARIA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	3	5	0	0	**8**	calificat
10	FLORESCU CELLA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	2	2	3	0	**7**	calificat
11	HEDES ANDREEA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	0	1	6	0	**7**	calificat
12	OTEL IOANA BIANCA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	1	6	0	**7**	calificat
13	TOLU DIANA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	3	1	3	0	**7**	calificat
14	COSTEA DARIA IOANA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	5	1	0	0	**6**	
15	DIMA ILEANA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	3	3	0	**6**	
16	DOBRE ANDREEA MARIA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ CONSTANŢA	3	3	0	0	**6**	
17	IGNUTA IASMINA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	0	5	1	0	**6**	
18	PITU BIANCA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	5	1	0	0	**6**	
19	SFIA ANCA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	5	1	0	0	**6**	
20	ILIE MIRUNA CORINA	COLEGIUL NAŢIONAL MIRCEA CEL BĂTRÂN CONSTANTA	0	5	0	0	**5**	
21	NEGOITA ANA MARIA	COLEGIUL NAŢIONAL MIHAI VITEAZUL PLOIESTI	0	2	3	0	**5**	
22	ABIBULA AISEL	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ CONSTANŢA	0	3	1	0	**4**	
23	BALAN SARAH SONIA	COLEGIUL NAŢIONAL MIRCEA CEL BĂTRÂN CONSTANTA	2	0	2	0	**4**	
24	DANIEL MEDEEA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	1	3	0	**4**	
25	PAUNESCU ALEXIA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	2	1	1	0	**4**	
26	SLANINA IULIA	COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU	2	2	0	0	**4**	
27	TOLOLOI ILINCA ROXANA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	2	0	0	**2**	
28	ALEXANDRU CATINCA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	1	0	0	**1**	
29	CALIN DIANA	LICEUL INTERNAŢIONAL DE INFORMATICĂ BUCUREŞTI	0	0	1	0	**1**	
30	MILCU AMELIA	COLEGIUL NAŢIONAL FRATII BUZESTI CRAIOVA	0	0	1	0	**1**	

Ultimele două baraje vor fi pe 18 și 19 ianuarie, la București (locul se va anunța pe site)