CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18 noiembrie 2017

Soluţii – Baraj EGMO

1. Se consideră cinci puncte distincte pe un cerc. Din centrul de greutate al fiecărui triunghi determinat de trei dintre aceste puncte se duce perpendiculara pe dreapta determinată de celelalte două puncte. Arătaţi că cele zece perpendiculare astfel obţinute sunt concurente.

Soluţie. Fie A, B, C, D, E punctele. Vom folosi vectorii de poziţie ai punctelor, luaţi cu originea în centrul O al cercului. Arătăm că punctul de concurenţă este punctul P având vectorul de poziţie $p = \frac{1}{3}(a+b+c+d+e)$ **3p**

Centrul de greutate G al triunghiului ABC are vectorul de poziţie $\frac{1}{3}(a+b+c)$ **1p**

Rezultă $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{3}(d+e)$, deci $\overrightarrow{GP}$ are direcţia lui $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, care este un vector perpendicular pe DE, adică perpendiculara din G pe DE trece prin P **3p**

2. Determinaţi toate perechile (a, b) de numere naturale care îndeplinesc condiţia: cel mai mare divizor comun al termenilor şirului $(a^n + b^n + 1)_{n\geq 1}$ este mai mare decât 1.

Soluţie. Dacă p este un factor prim al celui mai mare divizor comun şi $p \nmid a$, $p \nmid b$ atunci $0 \equiv a^{p-1}+b^{p-1}+1 \equiv 3 \pmod p$, deci $p = 3$. Obţinem $a+b \equiv 2 \pmod 3$ şi $a, b \not\equiv 0 \pmod 3$, de unde $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$; obţinem perechile $(a = 3k + 1, b = 3l + 1), k, l \in \mathbb{N}$ **4p**

Dacă p este un factor prim al celui mai mare divizor comun şi $p \mid a$, atunci $b+1 \equiv b^2+1 \equiv 0 \pmod p$, de unde $2 \equiv 0 \pmod p$, deci $p = 2$. Obţinem soluţiile $(a = 2k, b = 2l + 1), k, l \in \mathbb{N}$ şi, analog, $(a = 2k + 1, b = 2l), k, l \in \mathbb{N}$ **3p**

3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: oricare ar fi numerele reale x şi y, $f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$.

Soluţie. Pentru $y = 0$ obţinem $f(-1) + f(x)f(0) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $f(0) \neq 0$ ar rezulta f constantă – imposibil – deci $f(0) = 0$ şi $f(-1) = -1$ **1p**

Pentru $y = \frac{x+1}{x}, x \neq 0$ obţinem $f(x) + f(x)f(\frac{x+1}{x}) = 2x + 1$. Pentru $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ obţinem $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$, iar relaţia precedentă dă $f(\frac{1}{x})(1 + f(x + 1)) = \frac{2}{x} + 1$, de unde $1 + f(x+1) = (\frac{2}{x} + 1)f(x), x \neq 0$ (*) **2p**

Din ipoteză, $f(x-1) + f(x)f(1) = 2x-1$, sau $f(x) + f(x+1)f(1) = 2x+1, \forall x \in \mathbb{R}$. De asemenea, $f(0) + f^2(1) = 1$, deci $f(1) = \pm 1$ **1p**

În cazul $f(1) = 1$, $f(x + 1) = 2x + 1 - f(x)$. Din (*) reiese $2x + 2 = \frac{2+2x}{x}f(x)$, de unde $f(x) = x$ pentru $x \neq 0$ şi $x \neq -1$, iar formula este valabilă şi pentru $x \in \{0, 1\}$ **1p**

Dacă $f(1) = -1$, $f(x + 1) = f(x) - 2x - 1$, apoi $f(x) = -x^2$ pentru $x \neq 0$, iar formula este valabilă şi pentru $x = 0$ **1p**

Ambele funcţii găsite verifică relaţia iniţială **1p**

4. În p dintre vârfurile unui poligon regulat $A_0A_1 \dots A_{2016}$ se scrie „+1”, iar în celalte $n = 2017 - p$ vârfuri se scrie „−1”. Fie x_i numărul scris în vârful A_i, $i = 0, 1, \dots 2016$. Un vârf A_i se numeşte *bun* dacă $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_j > 0$ şi $x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + \dots + x_k > 0$ pentru orice j şi k întregi, $k \leq i \leq j$ (indicii sunt luaţi modulo 2017).

Determinaţi valoarea minimă a lui p pentru care, oricum am alege cele p vârfuri în care se scrie $+1$, există cel puţin un vârf bun.

Soluţie. Să numim un vârf *pozitiv* dacă în el am scris $+1$ şi *negativ* în caz contrar.

Vom arăta că răspunsul este 1345 .... **1p**

Dacă luăm 1344 de vârfuri pozitive $A_0, A_1, \dots, A_{1343}$, atunci $A_i + A_{i+1} + \dots + A_{2017} < 0$ pentru $i \geq 672$ şi $A_i + A_{i-1} + \dots + A_{-673} < 0$ pentru $i \leq 671$ **2p**

Dacă avem cel puţin 1345 de vârfuri pozitive, să asociem fiecărui vârf pozitiv A_i vârful A_j cu cel mai mic $j \geq i$ (dacă există) pentru care $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_j \leq 0$ şi vârful A_k cu cel mai mare $k \leq i$ (dacă există) pentru care $x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + \dots + x_k \geq 0$. Observăm că fiecare vârf negativ A_n poate fi asociat la cel mult un vârf pozitiv A_i pentru care $i < n$ şi n este minim cu proprietatea $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n \leq 0$ şi la cel mult un vârf pozitiv A_j pentru care $j > n$ şi n este maxim cu proprietatea $x_j + x_{j-1} + x_{j-2} + \dots + x_n \leq 0$. Deoarece există cel mult $2017 - 1345 = 672$ vârfuri negative, acestea au cel mult $2 \times 672 = 1344$ vârfuri asociate, deci rămâne cel puţin un vârf bun **4p**