CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18 noiembrie 2017

Soluţii – clasa a 9-a

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătaţi că, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale, atunci

$$\max\left\{a_1^2 - a_2, a_2^2 - a_3, \ldots, a_{n-1}^2 - a_n, a_n^2 - a_1\right\} \geq -\frac{1}{4}.$$

Soluţie. Observăm că $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - a_{k+1} + \frac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ **4p**

Deducem că în prima sumă există o paranteză ≥ 0, de unde concluzia **3p**

2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care sunt strict crescătoare şi au proprietatea $f(2n) = f(n) + n$, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$.

Soluţie. Funcţiile de forma $f(n) = n + c$, $c \in \mathbb{N}$, verifică **1p**

Apoi, rezultă inductiv că o astfel de funcţie verifică $f(2^n) = f(1) + 2^n - 1, \forall n \geq 1$.... **3p**

Cum $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(2^n)$, reiese că acestea sunt cele 2^n elemente ale mulţimii $\{f(1), f(1)+1, \ldots, f(1) + 2^n - 1\}$, deci $f(k) = f(1) + k - 1$ pentru orice k.... **3p**

3. Rezolvaţi ecuaţia $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right\} = \frac{17}{60}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie. Observăm că $n = 5$ este soluţie a ecuaţiei **2p**

Arătăm că numerele $x_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n}$, $1 < m < n$, nu sunt întregi, deci nu avem şi alte soluţii **2p**

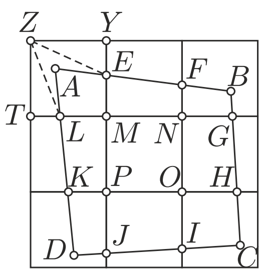
Fie p exponentul maxim cu care apare 2 în descompunerea în factori a numitorilor lui $x_{m,n}$. Atunci exact unul dintre numitori se divide cu 2^p, deci, prin aducere la acelaşi numitor, numitorul comun se va divide cu 2^p, pe când numărătorul va fi impar (deoarece toate fracţiile, în afară de cea al cărei numitor este divizibil cu 2^p, se amplifică cu un factor par)....... **3p**

Observaţie. Partea a doua a soluţiei se poate înlocui cu ideea de a arăta că, pentru $n \neq 5$ şi $n \neq 6$, suma se scrie ca o fracţie ireductibilă cu numitor diferit de 60; folosim apoi argumentul din partea a treia a soluţiei.

4. În figura alăturată este un pătrat împărţit în 9 pătrăţele egale. În interiorul pătrăţelelor 1, 3, 5 şi 7 se iau punctele A, B, C, respectiv D.

Arătaţi că aria părţii comune a patrulaterului $ABCD$ cu pătrăţelele 1, 3, 5 şi 7 este mai mică decât aria părţii comune a patrulaterului $ABCD$ cu pătrăţelele 2, 4, 6 şi 8.

1	2	3
8		4
7	6	5



Soluţie. Folosim notaţiile din figură. Fie l lungimea laturii unui pătrăţel. Atunci aria părţii comune a lui $ABCD$ cu pătrăţelul 2 este $\frac{l}{2}(EM + FN)$ **2p**

Aria părţii comune a lui $ABCD$ cu pătrăţelul 1 este mai mică decât $S_{EZLM} = l^2 - \frac{l}{2}EY - \frac{l}{2}TL = \frac{l}{2}(EM + ML)$........... **3p**

Reiese că aria părţii comune a lui $ABCD$ cu pătrăţelele 2, 4, 6, şi 8 este $\frac{l}{2}(EM + FN + GN + \ldots + LM)$, iar aria părţii comune a lui $ABCD$ cu pătrăţelele 1, 3, 5, şi 7 este mai mică decât aceeaşi sumă, de unde concluzia **2p**