Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi perechile de numere naturale (m,n) care verifică egalitatea $m^2-2001=4^n$.

2. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ ecuaţia $x+\frac{13}{x}=[x]+\frac{13}{[x]}$. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.)

3. Dacă *a*, *b* şi *c* sunt numere reale pozitive care verifică egalitatea $abc=1$, demonstraţi că:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ac}.$$

4. Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{BAC}\right)=50^\circ$ şi $m\left(\widehat{ACB}\right)=30^\circ$. Punctele *D* şi *E* sunt situate pe laturile (AB) şi respectiv (AC) astfel încât $m\left(\widehat{ACD}\right)=10^\circ$ şi $m\left(\widehat{ABE}\right)=20^\circ$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{ADE}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Determinaţi perechile de numere naturale (m,n) care verifică egalitatea $m^2-2001=4^n$.

Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $m^2-2^{2n}=2001$ sau $\left(m-2^n\right)\left(m+2^n\right)=2001$	**2p**
Cum $2001=3\cdot 23\cdot 29$, avem cazurile: $\begin{cases} m-2^n=1 \\ m+2^n=2001 \end{cases}$, $\begin{cases} m-2^n=3 \\ m+2^n=667 \end{cases}$, $\begin{cases} m-2^n=23 \\ m+2^n=87 \end{cases}$, $\begin{cases} m-2^n=29 \\ m+2^n=69 \end{cases}$.	**2p**
Pentru cazul $\begin{cases} m-2^n=23 \\ m+2^n=87 \end{cases}$, obţinem $(m,n)=(55,5)$ care este soluţie. Celelalte cazuri nu dau soluţii.	**3p**

Problema 2

Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ ecuaţia $x+\frac{13}{x}=[x]+\frac{13}{[x]}$. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.)

Notând $k=[x]\in\mathbb{Z}$ şi $f=x-[x]\in(0,1)$, avem $x=k+f$. Ecuaţia devine $k+f+\frac{13}{k+f}=k+\frac{13}{k}$, echivalentă cu $k(k+f)=13$.	**2p**
Pentru $k\geq 4$ avem $k(k+f)>16>13$, iar, pentru $0\leq k\leq 3$, avem $0\leq k(k+f)<12<13$. Prin urmare, $k<0$.	**2p**
Pentru $k\leq -5$, avem $k(k+f)>20>13$, iar pentru $-3\leq k\leq -1$, avem $0<k(k+f)<6<13$.	**2p**
Pentru $k=-4$, obţinem $f=\frac{3}{4}$, deci $x=-3\frac{1}{4}$ care este soluţie.	**1p**

Problema 3

Dacă *a*, *b* şi *c* sunt numere reale pozitive care verifică egalitatea $abc=1$, demonstraţi că:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ac}.$$

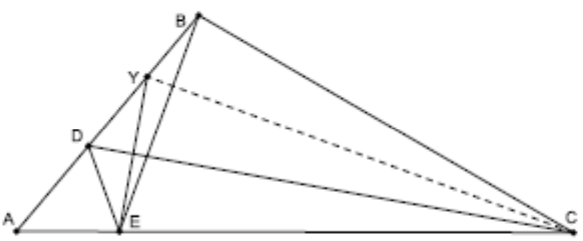
***

Din inegalitatea M.A.-M.G, obţinem $1+\dfrac{3}{a+b+c} \geq 2\sqrt{1\cdot\dfrac{3}{a+b+c}}$.	**1p**
E suficient să arătăm că $\sqrt{\dfrac{3}{a+b+c}} \geq \dfrac{3}{ab+bc+ac}$, echivalent cu $\dfrac{3}{a+b+c} \geq \left(\dfrac{3}{ab+bc+ac}\right)^2$, sau $(ab+ac+bc)^2 \geq 3(a+b+c)$.	**2p**
Dar $(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 =$ $= a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a+2b+2c$.	**2p**
Folosind inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, obţinem $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a+2b+2c \geq (ab\cdot ac)+(ab\cdot bc)+(ac\cdot bc)+2a+2b+2c =$ $=3a+3b+3c=3(a+b+c)$.	**2p**

Problema 4

Se consideră triunghiul ABC în care $m\left(\widehat{BAC}\right)=50^\circ$ şi $m\left(\widehat{ACB}\right)=30^\circ$. Punctele D şi E sunt situate pe laturile (AB) şi respectiv (AC) astfel încât $m\left(\widehat{ACD}\right)=10^\circ$ şi $m\left(\widehat{ABE}\right)=20^\circ$.

Determinaţi măsura unghiului $\widehat{ADE}$.

 Fie $(CY$ bisectoarea unghiului $\widehat{BCD}$, $Y\in AB$. Patrulaterul $BCEY$ este inscriptibil, deoarece $m\left(\widehat{ECY}\right)=m\left(\widehat{EBY}\right)=20^\circ$, deci $m\left(\widehat{EYC}\right)=m\left(\widehat{EBC}\right)=80^\circ$.	**3p**
Pe de altă parte, din triunghiul ECY, rezultă că $m\left(\widehat{EYC}\right)=80^\circ$, adică $CY=CE$. Deducem că triunghiurile ECDşi YCD sunt congruente, deci $ED=YD$. Prin urmare $m\left(\widehat{DEY}\right)=m\left(\widehat{EYD}\right)$.	**2p**
Dar $m\left(\widehat{EYD}\right)=m\left(\widehat{BCE}\right)=30^\circ$ şi, cum, pentru triunghiul DEY, unghiul $\widehat{ADE}$ este exterior, avem $m\left(\widehat{ADE}\right)=60^\circ$.	**2p**

,