Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VII-a

1. Determinaţi restul împăţirii numărului $p=\left[2,(242)\cdot 10^{2016}\right]$ la 2016, unde $[x]$ reprezintă cel mai mare număr întreg cel mult egal cu *x*.

2. Se consideră numerele raţionale nenule *x*, *y* şi *z* care verifică simultan relaţiile:

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+3\ ,\ \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+3 \text{ şi } \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+3.$$

a) Arătaţi că numerele *x*, *y* şi *z* au acelaşi semn;
b) Determinaţi numerele *x*, *y* şi *z*.

3. Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC. Pe prelungirea medianei $[CM]$, dincolo de vârful *C*, se consideră punctul *N* astfel încât $[CN]\equiv[BM]$, iar pe semidreapta $(AB$, dincolo de vârful *B*, se consideră punctul *P* astfel încât $[NP]\equiv[AC]$.

Dacă $m\left(\widehat{BMC}\right)=60^\circ$, demonstraţi că triunghiul *MCP* este echilateral.

4. Se consideră numerele naturale nenule şi diferite *a*, *b* şi *c*.

Demonstraţi că $\text{c.m.m.d.c.}(ab+1, bc+1, ca+1)<\frac{a+b+c}{3}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Determinaţi restul împăţirii numărului $p=\left[2,(242)\cdot 10^{2016}\right]$ la 2016, unde $[x]$ reprezintă cel mai mare număr întreg cel mult egal cu *x*.

Avem $p=\underbrace{2242242...242}_{2017\,\text{cifre}}=224\cdot 10^{2014}+224\cdot 10^{2011}+...+224\cdot 10+2=$ $\underbrace{224\cdot(M_9+1)+224\cdot(M_9+1)+...+224\cdot(M_9+1)}_{672\,\text{numere}}+2=224\cdot M_9+672\cdot 224+2=$	**3p** **3p**
$=M_{2016}+2\cdot 672+2$. Restul împărţirii este 1346	 **1p**

***

Problema 2

Se consideră numerele raţionale nenule *x*, *y* şi *z* care verifică simultan relaţiile:

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+3\ ,\ \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+3 \text{ şi } \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+3.$$

a) Arătaţi că numerele *x*, *y* şi *z* au acelaşi semn;

b) Determinaţi numerele *x*, *y* şi *z*.

***

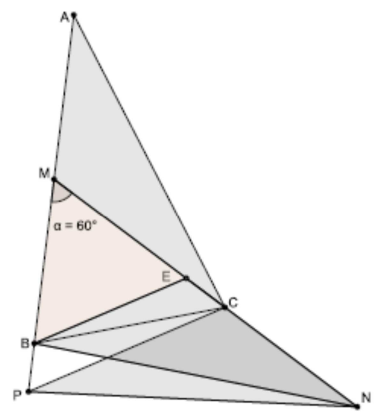
a) Dintre cele trei numere, cu siguranţă, două au acelaşi semn. Fie acestea *x* şi *y*. Cum $xy>0$, rezultă $\frac{y}{x}>0$, deci $\frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+3>3>0$, adică $yz>0$. Avem $0<(xy)\cdot(yz)=xy^2z$, deci *x* şi *z* au acelaşi semn.	 **2p**
b) Dacă tripletul (x,y,z) verifică relaţiile date, atunci şi tripletul $(-x,-y,-z)$ le verifică.	**1p**
Considerăm numerele *x*, *y* şi *z* pozitive, iar, datorită simetriei, putem lua $x\le y\le z$. Atunci $\frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+3\ge 1+3=4$, iar $\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+3\le 1+3=4$. Deci $4\le\frac{1}{yz}\le\frac{1}{xy}\le 4$, adică $x=z$, de unde obţinem $x=y=z=t>0$.	 **2p**
Cum $\frac{1}{t^2}=1+3=4$, rezultă $t=\frac{1}{2}$. Tripletele căutate sunt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.	 **2p**

Problema 3

Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC . Pe prelungirea medianei $[CM]$, dincolo de vârful *C*, se consideră punctul *N* astfel încât $[CN]\equiv[BM]$, iar pe semidreapta $(AB$, dincolo de vârful *B*, se consideră punctul *P* astfel încât $[NP]\equiv[AC]$.

Dacă $m\left(\widehat{BMC}\right)=60^\circ$, demonstraţi că triunghiul *MCP* este echilateral.

***

 Considerăm $E\in(MC)$ astfel încât $ME=MB$. Prin urmare triunghiul *MBE* este echilateral. Deci $MC=ME+EC=NC+CE=EN$ (4) . Cum $AM=BE$, iar $m\left(\widehat{AMC}\right)=m\left(\widehat{BEN}\right)=120^\circ$, rezultă că triunghiurile *AMC* şi *BEN* sunt congruente. Deducem că $AC=BN=NP$. (1)	3p
Avem $m\left(\widehat{EBN}\right)=180^\circ-\left(60^\circ+m\left(\widehat{PBN}\right)\right)=$ $=180^\circ-\left(60^\circ+m\left(\widehat{MPN}\right)\right)=m\left(\widehat{CNP}\right)$. (2) Cum $EB=CN$ (3), din (1),(2) şi (3), deducem că triunghiurile *EBN* şi *CNP* sunt congruente, deci $EN=CP$ (5) Din (4) şi (5) rezultă că triunghiul *MPC* este isoscel şi, cum $m\left(\widehat{PMC}\right)=60^\circ$, obţinem concluzia.	4p

Problema 4

Se consideră numerele naturale nenule şi diferite *a*, *b* şi *c*.

Demonstraţi că $\text{c.m.m.d.c.}(ab+1,bc+1,ca+1)<\dfrac{a+b+c}{3}$.

Presupunem $a<b<c$ şi fie $d=(ab+1,bc+1,ca+1)\geq 1$. Avem $d\,\big|\,(ca+1)-(ab+1)$, adică *d* divide numărul $a(c-b)$. Deoarece numerele *a* şi $(ab+1)$ sunt prime între ele, deducem că numărul *d* divide numărul $(c-b)$. Analog, deducem că numărul *d* divide numărul $(b-a)$. Prin urmare există numerele natural nenule *k* şl *l* astfel încât $b=a+kd>a+d$, respectiv $c=b+ld>b+d>(a+d)+d=a+2d$.	4p
Deci $\dfrac{a+b+c}{3}>\dfrac{a+(a+d)+(a+2d)}{3}=a+d>d$.	3p