Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VI-a

1. Cifrele *a* şi *b* sunt nenule şi diferite.
Dacă $3\cdot\overline{ab}+11=\overline{xy}$, iar $3\cdot\overline{ba}+11=\overline{zt}$, arătaţi că $\{x,y\}=\{z,t\}$.

2. Determinaţi cel mai mic număr natural $m=p^q\cdot q^p$, unde p şi q sunt numere prime diferite, iar numărul de divizori naturali ai lui *m* este pătrat perfect.

3. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care, împărţite la $\overline{dcba}$, dau câtul egal cu 2 şi restul egal cu 74.

4. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului natural *n*. (De exemplu: $S(2573)=17$.) Considerăm mulţimea $X=\{m\in\mathbb{N}^* \mid S(m)=32\}$. Determinaţi cea mai mică valoare a lui $S(m+1)$, unde $m\in X$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a X-a, Bucureşti, 18.11.2017

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Cifrele *a* şi *b* sunt nenule şi diferite.
Dacă $3\cdot\overline{ab}+11=\overline{xy}$, iar $3\cdot\overline{ba}+11=\overline{zt}$, arătaţi că $\{x,y\}=\{z,t\}$.

Putem presupune că $a>b$. Dacă $a\geq 3$, atunci $3\cdot\overline{ab}+11>3\cdot 30+11>100$, contradicţie.	**3p**
Deci $a=2$ şi $b=1$, adică $\overline{ab}=21$. Atunci $3\cdot 21+11=74=\overline{xy}$.	**2p**
Dacă $\overline{ba}=12$, atunci $3\cdot 12+11=47=\overline{zt}$. Rezultă că $\{x,y\}=\{z,t\}$.	**2p**

Problema 2

Determinaţi cel mai mic număr natural $m=p^q\cdot q^p$, unde *p* şi *q* sunt numere prime diferite, iar numărul de divizori naturali ai lui *m* este pătrat perfect.

Numărul de divizori ai lui *m* este egal cu $(p+1)(q+1)$. Putem considera $p<q$.	**2p**
Dacă $p=2$, atunci, pentru $q=11$, obţinem $3\cdot 12=36$ care este pătrat perfect , iar $m=2^{11}\cdot 11^2=247808$.	**2p**
Dacă $p=3$, atunci $q\geq 5$. Pentru $q=5$, avem $4\cdot 6=24$, care nu este pătrat perfect. Pentru $q\geq 7$, obţinem $m\geq 3^7\cdot 7^3=750141>2^{11}\cdot 11^2$.	**2p**
Dacă $p\geq 5$ şi $q\geq 7$, atunci $m\geq 5^7\cdot 7^5>3^7\cdot 7^3>2^{11}\cdot 11^2$. Numărul căutat este $m=2^{11}\cdot 11^2=247808$.	**1p**

Problema 3 Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care, împărţite la $\overline{dcba}$, dau câtul egal cu 2 şi restul egal cu 74.

Din teorema împărţirii cu rest obţinem $\overline{abcd}=2\cdot\overline{dcba}+74$ şi deducem că *d* este o cifră pară mai mică decât 5.	**2p**
Dacă $d=4$, atunci ultima cifră a numărului din membrul stâng este 4 , deci $a=5$. Atunci obţinem $\overline{abcd}<2\cdot\overline{dcba}$, contradicţie.	**2p**
Dacă $d=2$, atunci ultima cifră a numărului $2\cdot\overline{dcba}+74$ este 2, de unde $a=4$. Obţinem $c=0$ şi $b=1$. Numărul căutat este 4102.	**3p**

Problema 4

Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului natural *n*. (De exemplu: $S(2573)=17$.)

Considerăm mulţimea $X=\{m\in\mathbb{N}^* \mid S(m)=32\}$. Determinaţi cea mai mică valoare a lui $S(m+1)$, unde $m\in X$.

Dacă $m\in X$, atunci restul împărţirii lui *m* la 9 este egal cu restul împărţirii lui 32 la 9 , adică 5.	**2p**
Deci numărul $m+1$ dă restul 6 la împărţirea cu 9 , adică $S(m+1)\in\{6,15,24,33\}$.	**3p**
Cea mai mică valoare posibilă a lui $S(m+1)$ este 6. Ea este atinsă, de exemplu, dacă $m=5999$.	**2p**