Soluţii – clasele 11-12

1. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de

$$x_n = C_n^0 + \frac{1}{2}C_{n+1}^1 + \frac{1}{2^2}C_{n+2}^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n}^n,\ n \in \mathbb{N}$$

este progresie geometrică.

Soluţie. Avem $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ şi arătăm că $x_{n+1} = 2x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ **1p**

$x_{n+1} = C_{n+1}^0 + \frac{1}{2}C_{n+2}^1 + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n+1}^n + \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+2}^{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^0\right) + \ldots + \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\left(C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^n\right) = \left(C_n^0 + \frac{1}{2}C_{n+1}^1 + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n}^n\right) + \left(\frac{1}{2}C_{n+1}^0 + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n}^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+1}^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+1}^n\right) = x_n + y_n \quad (*)$ **2p**

Avem $y_n = \frac{1}{2}\left(C_{n+1}^0 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}C_{2n}^{n-1} + \frac{1}{2^n}C_{2n+1}^n\right) + \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+1}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+2}^{n+1}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}C_{2n+1}^{n+1} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}\left(2C_{2n+1}^{n+1} - C_{2n+2}^{n+1}\right)$ **3p**

Cum $2C_{2n+1}^{n+1} = C_{2n+2}^{n+1}$, (*) devine $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$, de unde concluzia **1p**

2. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie bijectivă astfel încât şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \frac{1}{n}f(n)$ are limită, iar aceasta este egală cu ℓ. Arătaţi că $\ell = 1$.

Soluţie. Dacă $\ell > 1$, atunci ar exista un rang n_0 aşa încât $f(n) > n$ pentru $n \geq n_0$ ... **2p**

Fie $M = \max\{f(1), \ldots, f(n_0)\}$. Atunci $M > n_0$, deci $f(n) > n > M$ pentru $n \geq M$. Astfel reiese că funcţia atinge cel mult $M - 1$ dintre valorile $1, 2, \ldots, M$ – contradicţie cu faptul că este surjectivă **2p**

Analog deducem că dacă $\ell < 1$, atunci f nu este injectivă **3p**

3. Determinaţi numărul maxim de intervale de forma $[a, a+1]$, $a \in \mathbb{R}$, care pot fi alese astfel încât să fie indeplinite simultan condiţiile:

- reuniunea intervalelor alese este intervalul $[0, 50]$;
- prin înlăturarea oricăruia dintre intervalele alese, intervalele rămase nu mai au reuniunea egală cu $[0, 50]$.

Soluţie. Răspuns: 98 .... **2p**

Un exemplu este dat de intervalele $I_k = [k + \frac{k}{48}, k + 1 + \frac{k}{48}]$, $0 \leq k \leq 48$, împreună cu intervalele $J_k = [k - \frac{49}{100} + \frac{k}{48}, k + \frac{51}{100} + \frac{k}{48}]$, $1 \leq k \leq 49$ (J_k are mijlocul cu $\frac{1}{100}$ „după" capătul din dreapta a lui I_k şi cu $\frac{1}{100}$ „înainte" de capătul din stânga a lui I_{k+1}) **2p**

Dacă avem 99 de intervale $[a_k, a_k + 1]$ cu $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{98} = 49$, a căror reuniune este $[0, 50]$, atunci $\sum_{k=0}^{48}(a_{2k+2} - a_{2k}) = 49$, deci unul dintre termeni sumei este mic sau egal cu 1. Dar, dacă $a_{2p+2} - a_{2p} \leq 1$, atunci intervalul $[a_{2p+1}, a_{2p+1} + 1]$ este inclus în reuniunea intervalelor $[a_{2p}, a_{2p} + 1]$ şi $[a_{2p+2}, a_{2p+2} + 1]$, deci poate fi înlăturat **3p**

4. În p dintre vârfurile unui poligon regulat $A_0A_1 \ldots A_{2016}$ se scrie „+1", iar în celalte $n = 2017 - p$ vârfuri se scrie „−1". Fie x_i numărul scris în vârful A_i, $i = 0, 1, \ldots 2016$. Un vârf A_i se numeşte *bun* dacă $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_j > 0$ şi $x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + \ldots + x_k > 0$ pentru orice j şi k întregi, $k \leq i \leq j$ (indicii sunt luaţi modulo 2017).

Determinaţi valoarea minimă a lui p pentru care, oricum am alege cele p vârfuri în care se scrie $+1$, există cel puţin un vârf bun.

Soluţie. Să numim un vârf *pozitiv* dacă în el am scris $+1$ şi *negativ* în caz contrar.

Vom arăta că răspunsul este 1345 .... **2p**

Dacă luăm 1344 de vârfuri pozitive $A_0, A_1, \ldots, A_{1343}$, atunci $A_i + A_{i+1} + \ldots + A_{2017} < 0$ pentru $i \geq 672$ şi $A_i + A_{i-1} + \ldots + A_{-673} < 0$ pentru $i \leq 671$ **2p**

Dacă avem cel puţin 1345 de vârfuri pozitive, să asociem fiecărui vârf pozitiv A_i vârful A_j cu cel mai mic $j \geq i$ (dacă există) pentru care $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_j \leq 0$ şi vârful A_k cu cel mai mare $k \leq i$ (dacă există) pentru care $x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + \ldots + x_k \geq 0$. Observăm că fiecare vârf negativ A_n poate fi asociat la cel mult un vârf pozitiv A_i pentru care $i < n$ şi n este minim cu proprietatea $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_n \leq 0$ şi la cel mult un vârf pozitiv A_j pentru care $j > n$ şi n este maxim cu proprietatea $x_j + x_{j-1} + x_{j-2} + \ldots + x_n \leq 0$. Deoarece există cel mult $2017 - 1345 = 672$ vârfuri negative, acestea au cel mult $2 \times 672 = 1344$ vârfuri asociate, deci rămâne cel puţin un vârf bun **3p**