Soluţii – clasa a 10-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=8 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-5}+\sqrt{z}=8 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z-7}=8 \end{cases}$.

Soluţie. Observăm soluţia $(4, 9, 16)$ **1p**

Prin scăderea primelor două ecuaţii obţinem $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{y}-\sqrt{y-5}$ **1p**

Folosind conjugate, relaţia poate fi scrisă $3(\sqrt{y}+\sqrt{y-5})=5(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})$. Aceasta arată că, dacă (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) sunt soluţii iar $x_1 < x_2$, atunci şi $y_1 < y_2$ **3p**

Folosind analog ecuaţiile 2 şi 3, precum şi concluzia precedentă, deducem că sistemul nu poatea avea mai mult de o soluţie: dacă (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) ar fi soluţii diferite şi, de exemplu, $x_1 < x_2$, atunci $y_1 < y_2$ şi $z_1 < z_2$, în contradiţie cu $\sqrt{x_1-3}+\sqrt{y_1}+\sqrt{z_1}=\sqrt{x_2-3}+\sqrt{y_2}+\sqrt{z_2}$ **2p**

2. Arătaţi că, dacă a şi x sunt numere reale şi $a \geq 2$, atunci $a^{\sin x}(a+1)^{\cos x} < a^2$.

Soluţie. Prin logaritmare obţinem relaţia echivalentă $\sin x + (\log_a(a+1))\cos x < 2$ ... **2p**

Pentru $\cos x \leq 0$, inegalitatea este evidentă **1p**

Apoi $\log_a(a+1)=\frac{\ln(a+1)}{\ln a}=\frac{\ln a+\ln(1+1/a)}{\ln a}\leq 1+\frac{\ln(1+1/2)}{\ln 2}=\log_2 3$ **2p**

Pentru $\cos x > 0$, cum $\log_2 3 < 1{,}6$ (deoarece $3^5 < 2^8$), deducem că membrul stâng al inegalităţii de demonstrat este mai mic decât $\sin x + 1{,}6\cos x \leq \sqrt{1^2+1{,}6^2} < 2$ **2p**

3. Se consideră cinci puncte distincte pe un cerc. Din centrul de greutate al fiecărui triunghi determinat de trei dintre aceste puncte se duce perpendiculara pe dreapta determinată de celelalte două puncte. Arătaţi că cele zece perpendiculare astfel obţinute sunt concurente.

Soluţie. Fie A, B, C, D, E punctele. Vom folosi vectorii de poziţie a punctelor, luaţi cu originea în centrul O al cercului. Arătăm că punctul de concurenţă este punctul P având vectorul de poziţie $p=\frac{1}{3}(a+b+c+d+e)$ **3p**

Centrul de greutate G al triunghiului ABC are vectorul de poziţie $\frac{1}{3}(a+b+c)$ **1p**

Rezultă $\overrightarrow{GP}=\frac{1}{3}(d+e)$, deci $\overrightarrow{GP}$ are direcţia lui $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, care este un vector perpendicular pe DE, adică perpendiculara din G pe DE trece prin P **3p**

4. Vom spune că un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive este

- *supercrescător* dacă există $q > 1$ astfel încât $a_{n+1} \geq q a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n;
- *rarefiat* dacă există un număr natural k astfel încât orice interval $[x, 2x]$, $x \in \mathbb{R}$, să conţină cel mult k termeni ai şirului.

a) Este adevărat că orice şir supercrescător este rarefiat?

b) Este adevărat că orice şir strict crescător şi rarefiat este supercrescător?

Soluţie. a) Da. Pentru un şir supercrescător, $a_{n+k} \geq q^k a_n, \forall k \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Pentru k ales convenabil (i.e. $k > \log_q 2$), $q^k > 2$, deci $a_{n+k} > 2a_n$ **1p**

Astfel, dacă a_n este cel mai mic termen al şirului situat în $[x, 2x]$, atunci în acest interval se pot afla cel mult k termeni ai şirului: $\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}\}$ **1p**

b) Nu. Contraexemplu: şirul dat de $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{, pentru } n \text{ impar} \\ \frac{n+1}{n}\cdot 2^{n-1} & \text{, pentru } n \text{ par} \end{cases}$ **2p**

Avem $a_{2n-1}=2^{2n-1} < a_{2n}$ şi $a_{2n}=\frac{2n+1}{2n}2^{2n-1} < 2\cdot 2^{2n-1}=a_{2n+1}$, deci şirul este strict crescător. Apoi, deoarece $a_{2n+1}=2a_{2n-1}$, un interval $[x, 2x]$ conţine cel mult un termen de rang impar, deci, fiind strict crescător, cel mult trei termeni ai şirului **1p**

În sfârşit, dacă şirul ar fi supercrescător, din $a_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)a_{2n-1}$ ar reieşi că $1+\frac{1}{2n} \geq$ $\geq q > 1$, adică $2n \leq \frac{1}{q-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ – imposibil **1p**