

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA A V-A, TULCEA, 23 februarie 2013

Clasa a VIII – a

1. Se consideră numărul $p(m) = 48m^2 + 16m + 1$, unde $m \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect, arătați că m este produsul a două numere naturale consecutive.
 - b) Dați un exemplu de pereche de numere naturale nenule $(m; a)$ cu proprietatea că $p(m) = (8a + 1)^2$.

2. Se consideră piramida $SABCD$ în care baza $ABCD$ este un paralelogram cu centrul în punctul O , $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $A_{ABCD} = 12\text{cm}^2$. Se știe că $SO \perp (ABCD)$, $SO = \sqrt{3}$ cm, iar $(SBC) \perp (SDA)$.
 - a) Demonstrați că piramida $SABCD$ este regulată;
 - b) Arătați că $A_{SAC} = A_{SAB}$.

3. Determinați numerele reale pozitive a și b știind că $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} + \frac{b}{a^2 + 2b + 1} \geq \frac{1}{2}$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{a + b\sqrt{2013} \mid a, b \in \mathbb{N}, a^2 - 2013b^2 = 1\}$. Arătați că:
 - a) Numărul $[x]$ este număr natural impar, pentru orice $x \in A$;
 - b) $3\{x\} \leq [x]$, pentru orice $x \in A$.(Notațiile $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă *partea întreagă* și respectiv *partea fracționară* a numărului real a .)

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a V-A, TULCEA, 23 februarie 2013

Soluții orientative și bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se consideră numărul $p(m) = 48m^2 + 16m + 1$, unde $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect, arătați că m este produsul a două numere naturale consecutive.

b) Dați un exemplu de pereche de numere naturale nenule $(m;a)$ cu proprietatea că $p(m) = (8a + 1)^2$.

prof. Mircea Fianu, București

a) Avem $p(m) = (4m + 1)(12m + 1)$.	1p
Numerele $4m + 1$ și $12m + 1$ sunt prime între ele.	1p
Dacă $p(m)$ este pătrat perfect, atunci fiecare dintre numerele $4m + 1$ și $12m + 1$ este pătrat perfect.	1p
Cum numărul $4m + 1$ este impar, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $4m + 1 = (2k + 1)^2$.	1p
Deducem că $4m + 1 = 4k(k + 1) + 1$, de unde $m = k(k + 1)$.	1p
b) Pentru $m = 30$, obținem $p(30) = 121 \cdot 361 = (11 \cdot 19)^2 = 209^2$.	1p
Cum $209 = 8 \cdot 26 + 1$, obținem $a = 26$, deci $(m;a) = (30; 26)$.	1p

Problema 2.

Se consideră piramida $SABCD$ în care baza $ABCD$ este un paralelogram cu centrul în punctul O , $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $A_{ABCD} = 12\text{cm}^2$. Se știe că $SO \perp (ABCD)$, $SO = \sqrt{3}$ cm, iar $(SBC) \perp (SDA)$.

a) Demonstrați că piramida $SABCD$ este regulată;

b) Arătați că $A_{SAC} = A_{SAB}$.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea, prof. Mircea Fianu, București

a) Considerăm punctele $E \in DC$ și $F \in AB$ astfel încât $SE \perp DC$ și $SF \perp AB$. Rezultă că punctele E , O și F sunt coliniare, iar $EF \perp DC$.	1p
Deoarece $A_{ABCD} = AB \cdot EF$, rezultă că $EF = 2\sqrt{3}$ cm.	1p
Considerăm punctele $M \in BC$ și $N \in AD$ astfel încât $SM \perp BC$ și $SN \perp AD$. Rezultă că punctele M , O și N sunt coliniare, iar $MN \perp BC$. Cum dreapta de intersecție a planelor (SBC) și (SDA) este paralelă cu BC , deducem că $m(\widehat{SBC}; \widehat{SDA}) = m(\widehat{MSN}) = 90^\circ$.	1p

În triunghiul dreptunghic MSN , $[SO]$ este mediană, deci $MN = 2 \cdot SO = 2\sqrt{3}$ cm.	1p
Cum $AB = EF = MN$, rezultă că, în paralelogramul $ABCD$, distanțele dintre laturile opuse sunt egale cu laturile, rezultă că $ABCD$ este pătrat. Prin urmare, piramida $SABCD$ este regulată.	1p
b) Punctul F este mijlocul segmentului $[AB]$. Cum $AF = SO = \sqrt{3}$ cm, triunghiurile dreptunghice SAF și ASO sunt congruente (I. C.)	1p
Deoarece $A_{SAC} = 2 \cdot A_{ASO}$, iar $A_{SAB} = 2 \cdot A_{ASF}$ rezultă că $A_{SAC} = A_{SAB}$.	1p

Problema 3.

Determinați numerele reale pozitive a și b știind că $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} + \frac{b}{a^2 + 2b + 1} \geq \frac{1}{2}$.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Avem $a^2 + 1 \geq 2a$, cu egalitate pentru $a = 1$. Rezultă că obținem $a^2 + 2b + 1 \geq 2(a + b)$ și, analog, $b^2 + 2a + 1 \geq 2(a + b)$, cu egalitate pentru $b = 1$.	2p
Deci $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} \leq \frac{a}{2(a + b)}$ și $\frac{b}{a^2 + 2b + 1} \leq \frac{b}{2(a + b)}$.	1p
Prin adunarea ultimelor două inegalități rezultă că $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} + \frac{b}{a^2 + 2b + 1} \leq \frac{1}{2}$.	2p
Din ipoteză $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} + \frac{b}{a^2 + 2b + 1} \geq \frac{1}{2}$, deci $\frac{a}{b^2 + 2a + 1} + \frac{b}{a^2 + 2b + 1} = \frac{1}{2}$.	1p
Înseamnă că trebuie să avem egalitate în fiecare din inegalitățile $a^2 + 1 \geq 2a$ și $b^2 + 1 \geq 2b$. Acest lucru are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.	1p

Problema 4.

Se consideră mulțimea $A = \left\{ a + b\sqrt{2013} \mid a, b \in \mathbb{N}, a^2 - 2013b^2 = 1 \right\}$. Arătați că:

a) Numărul $[x]$ este număr natural impar, pentru orice $x \in A$;

b) $3\{x\} \leq [x]$, pentru orice $x \in A$.

(Notățiile $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă *partea întreagă* și respectiv *partea fracționară* a numărului real a .)

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

a) Dacă $x \in A$, atunci $x \neq 0$, deci $x \geq 1$. Fie $x = a + b\sqrt{2013} \in A$, cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $a^2 - 2013b^2 = 1$. Cum $x \geq 1$, avem $\frac{1}{x} - 1 \leq 0$, deci $x + \frac{1}{x} - 1 \leq x$. Prin urmare, $x \geq x + \frac{1}{x} - 1 = a + b\sqrt{2013} + \frac{1}{a + b\sqrt{2013}} - 1 = 2a - 1$. (1)	2p
Pe de altă parte, $0 \leq 2013b^2 = a^2 - 1 < a^2$, deci $b\sqrt{2013} < a$, echivalent cu $a + b\sqrt{2013} < 2a$. (2)	2p

Din (1) și (2) deducem că $2a - 1 \leq x < 2a$, deci $[x] = [a + b\sqrt{2013}] = 2a - 1$ care este număr impar.	1p
b) Din punctul anterior rezultă $[x] = x + \frac{1}{x} - 1$, deci $\{x\} = x - [x] = 1 - \frac{1}{x}$.	1p
Inegalitatea $3\{x\} \leq [x]$ este echivalentă cu $3\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq x + \frac{1}{x} - 1$, sau $(x - 2)^2 \geq 0$.	1p