Concursul IMAR din cadrul Concursului "Laurenţiu Panaitopol"
24 noiembrie 2012

Problema 1. Fie K o mulţime convexă în plan, simetrică în raport cu un punct O, şi X, Y, Z trei puncte în K. Să se arate că vârful unuia dintre vectorii

$$\overrightarrow{OX} \pm \overrightarrow{OY}, \quad \overrightarrow{OX} \pm \overrightarrow{OZ}, \quad \overrightarrow{OY} \pm \overrightarrow{OZ}$$

este în mulţimea K.

Problema 2. Fie n un număr întreg mai mare decât 1. Să se calculeze suma

$$\sum \frac{1}{pq},$$

unde sumarea este efectuată după toate numerele întregi coprime p şi q, astfel încât $1 \leq p < q \leq n$ şi $p + q > n$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi, D un punct diferit de A, situat pe bisectoarea exterioară ℓ a unghiului BAC, şi E un punct situat în interiorul segmentului AD. Simetricele dreptei ℓ în raport cu bisectoarele interioare ale unghiurilor BDC şi BEC se intersectează în punctul F. Să se arate că unghiurile ABD şi EBF sunt congruente.

Problema 4. Să se construiască o mulţime finită nevidă S de puncte în plan, care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:

(a) orice dreaptă din plan conţine cel mult patru puncte din S; şi

(b) oricum ar fi colorat fiecare punct din S cu una din două culori, există trei puncte coliniare monocolore în S.