

Societatea de Științe Matematice din România, filiala București
Colegiul Național „Spiru Haret”, București
Centrul de Documentare și Informare „Laurențiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a V-a, București, 24 noiembrie 2012

SUBIECTELE

Clasa a IX-a

1. O funcție $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile:

- (1) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in [-1, 1]$
- (2) $f(-1) = f(1)$.

Arătați că

$$|f(x) - f(y)| \leq 1, \forall x, y \in [-1, 1].$$

2. Arătați că, oricum am alege 15 numere din mulțimea $\{2, 3, 4, \dots, 2012\}$, prime între ele două câte două, printre numerele alese se află un număr prim.

3. Aflați valorile reale ale lui m pentru care ecuația

$$x^2 + mx + m^2 = 2$$

are o soluție întreagă.

Laurențiu Panaitopol

4. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor AB , BC , CA în D , E , respectiv F . Paralela din A la EF taie DE în M , iar paralela din A la DE taie EF în N . Arătați că punctele M și N se află pe linia mijlocie a triunghiului ABC , paralelă cu BC .

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.