

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a V-a, București, 24 noiembrie 2012

### SUBIECTELE

#### Clasele XI-XII

1. Arătați că dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este crescătoare și funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este descrescătoare, atunci funcția  $h = \max(f, g)$  este mărginită inferior.

2. Fie  $a, b \in (0, \infty)$  astfel încât

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a + b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}.$$

3. a) Arătați că orice șir se poate scrie ca sumă de două șiruri monotone.

b) Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  dat de formula

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n(n+1)}$$

nu se poate scrie ca sumă de două șiruri care sunt monotone și au termeni pozitivi.

*Laurențiu Panaitopol*

4. Fie  $z_1, z_2, \dots, z_n$  numere complexe astfel încât

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 4.$$

Arătați că există o submulțime nevidă  $K$  a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  astfel încât

$$\left| \sum_{k \in K} z_k \right| > 1.$$

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.*