Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a V-a, Bucureşti, 24 noiembrie 2012

SUBIECTELE

Clasa a X-a

1. Fie ABC un triunghi şi D punctul de tangenţă cu latura BC a cercului exînscris corespunzător vârfului A; paralelele prin D la bisectoarele unghiurilor B şi C intersectează paralela la BC prin mijloacele laturilor AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că:

a) $MN = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$;

b) $AMDN$ este paralelogram.

2. Două funcţii f, g de gradul al doilea au proprietatea că pentru orice punct A de pe graficul lui f găsim un punct B pe graficul lui g astfel încât $AB < 1$.

Arătaţi că există numerele reale k, l astfel încât $f(x) - g(x) = kx + l$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Arătaţi că nu există niciun număr raţional a şi un număr real x astfel încât $|x| < \sqrt{3}$ iar numerele $\sqrt{3 - x^2}$ şi $\sqrt[3]{a - x^3}$ să fie simultan raţionale.

Laurenţiu Panaitopol

4. a) Arătaţi că există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) - f(y) \geq (x - y)^2 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R},\ x \geq y.$$

b) Arătaţi că nu există nicio funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) - f(y) \geq \sqrt{x - y} \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R},\ x \geq y.$$

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.