Soluţii şi barem – clasa a IX-a

1. O funcţie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ are proprietăţile:

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|, \text{ pentru orice } x, y \in [-1, 1] \text{ şi } f(-1) = f(1).$$

Arătaţi că $|f(x) - f(y)| \le 1, \forall x, y \in [-1, 1]$.

Soluţie. Dacă $|x - y| \le 1$, atunci $|f(x) - f(y)| \le |x - y| \le 1$ **3p**

Dacă $|x - y| \ge 1$, atunci presupunând, de exemplu, $x < y$, obţinem:
$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(-1) + f(1) - f(y)| \le |f(x) - f(-1)| + |f(1) - f(y)| \le |x + 1| + |1 - y| = x + 1 + 1 - y = 2 - |x - y| \le 1$ **4p**

2. Arătaţi că oricum am alege 15 numere din mulţimea $\{2, 3, 4, \ldots, 2012\}$, prime între ele două câte două, printre numerele alese se află un număr prim.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că niciun număr nu este prim. Atunci numerele se scriu în forma $n_i = a_i b_i c_i, i \in \overline{1, 15}$, cu $a_i \le b_i$ numere prime, $\{a_i, b_i\} \cap \{a_j, b_j\} = \emptyset$ pentru $i \ne j$ şi $c_i \in \mathbb{N}^*$ **3p**

Rezultă $n_i \ge (a_i)^2$ **2p**

Pe de altă parte, numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ sunt prime distincte, deci cel puţin unul dintre ele – fie acesta a_i – este mai mare decât al 15-lea număr prim, care este 47. Pentru acel număr obţinem $n_i^2 \ge 47^2 > 2012$ – contradicţie **2p**

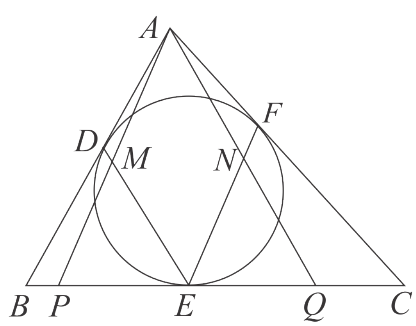
3. Aflaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $x^2 + mx + m^2 = 2$ are o soluţie întreagă.

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie $3x^2 + (x + 2m)^2 = 8$ **2p**

Rezultă $3x^2 \le 8$ deci, deoarece $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \{-1, 0, 1\}$ **2p**

Aceste valori corespund lui $m = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $m = \pm\sqrt{2}$, respectiv $m = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ **3p**

4. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor AB, BC, CA în D, E, respectiv F. Paralela din A la EF taie DE în M, iar paralela din A la DE taie EF în N. Arătaţi că punctele M şi N se află pe linia mijlocie a triunghiului ABC, paralelă cu BC.



Soluţie. Fie $AM \cap BC = \{P\}$, $AN \cap BC = \{Q\}$. Este suficient să arătăm că $AM = MP$ (în acest caz rezultă analog $AN = NQ$, de unde concluzia) **2p**

Deoarece $CE = CF$ şi $AP \parallel EF$, $APEF$ este trapez isoscel, deci $PE = AF$; în mod analog $QE = AD$ **3p**

Din $AD = AF$ reiese că $PE = QE$, deci EM este linie mijlocie în triunghiul PQA, ceea ce arată că $AM = AP$ **2p**