Soluţii şi barem – clasele XI-XII

1. Arătaţi că dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este crescătoare şi funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este descrescătoare, atunci funcţia $h=\max(f,g)$ este mărginită inferior.

Soluţie. Dacă $f(x)\ge g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $h=f$, apoi $h(x)\ge g(x)\ge g(0)$ pentru $x\le 0$ şi $h(x)\ge f(x)\ge f(0)\ge g(0)$ pentru $x\ge 0$, deci $g(0)$ este un minorant pentru h **2p**

Dacă $f(x)\le g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $h=g$, apoi $h(x)\ge g(x)\ge g(0)\ge f(0)$ pentru $x\le 0$ şi $h(x)\ge f(x)\ge f(0)$ pentru $x\ge 0$, deci $f(0)$ este un minorant pentru h **2p**

În sfârşit, dacă există $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)<g(x_1)$ şi $f(x_2)>g(x_2)$, atunci $x_1<x_2$ (datorită monotoniei) şi $h(x)\ge g(x)\ge g(x_1)\ge f(x_1)$ pentru $x\le x_1$, $h(x)\ge f(x)\ge f(x_2)\ge g(x_2)$ pentru $x\ge x_2$, iar $f(x)\ge f(x_1)$ şi $g(x)\ge g(x_2),\forall x\in[x_1,x_2]\Rightarrow h(x)\ge\min\{f(x_1),g(x_2)\}$ $\forall x\in[x_1,x_2]$, deci $\min\{f(x_1),g(x_2)\}$ este un minorant pentru h **3p**

Observaţie. Dacă există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0)=g(x_0)$, atunci un minorant pentru h este $f(x_0)$. Este însă posibil ca să nu existe acest număr, de exemplu dacă $f_1(x)=e^x,\ g_1(x)=-e^x$, $f_2(x)=-e^{-x},\ g_2(x)=e^{-x}$ sau $f_3(x)=[x],\ g_3(x)=1-[x]$.

2. Fie $a,b\in(0,\infty)$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Arătaţi că $(a+b)^n-a^n-b^n\ge 2^{2n}-2^{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$.

Soluţie. Din ipoteză $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}$, de unde $ab\ge 4$ **2p**

Inegalitatea se rescrie $a^nb^n-a^n-b^n\ge 2^{2n}-2^{n+1}$, sau $(a^n-1)(b^n-1)\ge(2^n-1)^2$, adică $(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\ldots+1)\ge(2^n-1)^2$, deoarece $(a-1)(b-1)=1$ **2p**

Folosind acum inegalitatea C. B. S. obţinem $(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\ldots+1)\ge$ $(\sqrt{a^{n-1}b^{n-1}}+\sqrt{a^{n-2}b^{n-2}}+\ldots+\sqrt{1})^2\ge(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1)^2=(2^n-1)^2$ **3p**

3. a) Arătaţi că orice şir se poate scrie ca sumă de două şiruri monotone.

b) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n(n+1)}$, nu se poate scrie ca sumă de două şiruri care sunt monotone şi au termeni pozitivi.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. a) Dacă $(a_n)_{n\ge1}$ este un şir arbitrar, atunci $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=n(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)$ este crescător iar $(y_n)_{n\ge1}$, $y_n=a_n-x_n$ are proprietatea $y_{n+1}-y_n=a_{n+1}-(n+1)|a_{n+1}|-a_n-|a_n|-\ldots-|a_1|\le 0$, deci este descrescător **3p**

b) Dacă $a_n=b_n+c_n$, cu $(b_n)_n$ şi $(c_n)_n$ monotone, atunci din $a_{2n}>a_{2n+1}$ şi $a_{2n+1}<a_{2n+2}$ reiese că şirurile au monotonii diferite – de exemplu $(b_n)_n$ este crescător şi $(c_n)_n$ descrescător **2p**

Din $(a_n)_n\to 0$ şi $b_n,c_n\ge 0$ reiese $(b_n)_n\to 0$, de unde $b_n=0$ şi $c_n=a_n$ – contradicţie **2p**

4. Fie $z_1,z_2,\ldots,z_n$ numere complexe astfel încât $|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|=4$. Arătaţi că există o submulţime nevidă K a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât $\Big|\sum_{k\in K}z_k\Big|>1$.

Soluţie. Observăm că, dacă $z=a+bi$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, atunci $|z|\le|a|+|b|$ **2p**

Notând $z_k=x_k+iy_k,\ x_k,y_k\in\mathbb{R}$, obţinem $4\le\sum_{x_k\ge0}|x_k|+\sum_{x_k<0}|x_k|+\sum_{y_k\ge0}|y_k|+\sum_{y_k<0}|y_k|$ **2p**

Dacă una dintre sume este >1 rezultă, de exemplu, $1<\sum_{x_k\ge0}|x_k|=\Big|\sum_{x_k\ge0}x_k\Big|\le\Big|\sum_{x_k\ge0}z_k\Big|$ ... **2p**

Inegalitatea este strictă şi dacă toate sumele sunt egale cu 1, iar cel puţin unul dintre numere are atât partea reală cât şi cea imaginară nenule. În sfârşit, dacă toate sumele sunt egale cu 1 şi fiecare număr are ori partea reală, ori cea imaginară nulă, atunci

$$\Big|\sum_{x_k\ge0\ \text{sau}\ y_k\ge0}z_k\Big|=\sqrt{\Big(\sum_{x_k\ge0}x_k\Big)^2+\Big(\sum_{y_k\ge0}y_k\Big)^2}=\sqrt{2}>1.\qquad \mathbf{1p}$$