Concurul "Laurentiu Panaitopol" (IMAR)- 20 noiembrie 2010

1. Fie $(x_n)_{n>0}$ o secventa pentru care $x_n \in \{-1, 1\}$. Aratati ca $(x_n)_n$ are o perioada putere a lui 2 daca si numai daca exista un polinom cu coeficienti rationali P cu $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ pentru care $x_n = (-1)^{P(n)}$.

2. Fie $\triangle ABC$, in care cercul inscris e tangent la BC in punctul D. Un cerc care trece prin B si C e tangent la cercul inscris in E. Daca I_A este centrul cercului exinscris corespunzator punctului A, aratati ca D, E, I_A sunt coliniare.

3. Fie X_0, X_1, ..., X_n puncte distincte in plan. Aratati ca numarul de triunghiuri $X_0X_iX_j$ de arie A, unde A este un numar real strict pozitiv fixat, este cel mult $4n\sqrt{n}$.

Observatie: 4 poate fi imbunatatit si la $\sqrt{8}$. Interesant ar fi de gasit ordinul de marime al numarului de triunghiuri, care probabil e mai mic decat $n^{\frac{3}{2}}$.

4. Demonstrati ca cel mai mic numar N_r pentru care $\dfrac{N_r}{n+r}\dbinom{2n}{n}$ este intreg pentru orice n natural este $\dfrac{r}{2}\dbinom{2r}{r}$.

Observatie: $\binom{x}{y}$ reprezinta combinarile de x luate cate y.