

Concursul de matematică „Laurențiu Panaitopol”
Colegiul Național „Spiru Haret”, București, 20.11.2010

Clasele XI - XII

1. Câte numere dintre $1, 2, \dots, 2010$ se pot exprima în forma

$$[2x] + [4x] + [6x] + [8x], x \in \mathbb{R} ?$$

2. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care sunt mărginite și au proprietatea: pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + 1.$$

3. a) Rezolvați ecuația

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 3 - 4 \sin^2 x.$$

- b) Arătați că

$$\prod_{k=0}^{1024} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2048} - 3 \right) = 3.$$

4. Pentru fiecare număr natural $n > 1$ notăm cu d_n numărul divizorilor săi pozitivi și cu s_n suma acestora. Arătați că

$$d_n \sqrt{n} < s_n < n \sqrt{2d_n}.$$

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3,5 ore.