S.S.M.R., filiala Bucureşti

Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol

Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti, 20.11.2010

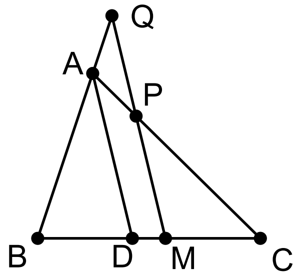
Barem de corectare, clasele IX - X

1. Fie triunghiul ABC, cu $AB < AC$ şi D piciorul bisectoarei din A. Pe semidreptele $(CA$ şi $(BA$ luăm punctele P, respectiv Q astfel încât $CP = AB$ şi $BQ = AC$. Notăm M intersecţia dreptei PQ cu BC.

a) Arătaţi că dreptele PQ şi AD sunt paralele.

b) Arătaţi că $BD = MC$.

c) Arătaţi că AD este medie geometrică între MP şi MQ.



Soluţie. a) Folosim relaţiile $m(\angle APQ) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle PAQ)) = m(\angle PAD)$ ... **2p**

b) Avem $\frac{CM}{CD} = \frac{CP}{CA}$ şi $\frac{BD}{BM} = \frac{BA}{BQ}$, deci $\frac{CM}{CD} = \frac{BD}{BM}$. **2p**

Reiese $CM(BC-CM)=BD(BC-BD)$, deci $(BD - CM)(BD + CM - BC) = 0$, de unde $BD = CM$ **1p**

c) $\frac{MP}{AD} = \frac{MC}{CD} = \frac{BD}{BM} = \frac{AD}{QM}$, de unde concluzia **2p**

2. Considerăm şirul numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte, aşzate în ordine crescătoare: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ... Arătaţi că al n-lea termen din acest şir este $n + [\frac{1}{2} + \sqrt{n}]$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Soluţie. Fie t_n al n-lea termen al şirului; atunci $t_n = n + p_n$, unde p_n este numărul pătratelor perfecte mai mici decât t_n, deci $p_n^2 < t_n < (p_n + 1)^2$...................... **3p**

Astfel, avem de arătat că $p_n = [\frac{1}{2} + \sqrt{n}]$, echivalent cu $p_n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n} < p_n + 1$, adică $p_n^2 - p_n + \frac{1}{4} \leq n < p_n^2 + p_n + \frac{1}{4}$ **2p**

Cum p_n şi n sunt întregi, ajungem la relaţia $p_n^2 - p_n + 1 \leq n \leq p_n^2 + p_n$. Dar, aceasta rezultă din definiţia lui t_n **2p**

3. Pe o tablă de şah sunt 33 de jetoane, aşezate în pătrăţele distincte. Arătaţi că există cel puţin 5 jetoane care sunt situate, două câte două, pe linii şi coloane diferite.

Soluţie. Fiind 8 linii şi 33 de jetoane, există o linie cu cel puţin 5 jetoane pe ea. Pe restul de 7 linii avem cel puţin 25 de jetoane; prin urmare, există o altă linie cu cel puţin 4 jetoane pe ea. Rămân 6 linii cu cel puţin 17 jetoane; dintre ele, una are cel puţin 3 jetoane. Restul de 5 linii au cel puţin 9 jetoane; găsim o linie cu cel puţin 2 jetoane. În sfârşit, mai găsim încă o linie cu cel puţin un jeton pe ea **4p**

Acum facem drumul invers, alegând câte un jeton din liniile selectate astfel încât jetoanele alese să se găsească pe coloane diferite (aceasta se poate, întrucât după fiecare alegere linia următoare – dacă există – are cu cel puţin un jeton mai mult decât numărul jetoanelor deja alese şi, deci, putem evita coloanele acestora). Obţinem astfel 5 jetoane aflate pe linii şi coloane diferite......... **3p**

4. a) Arătaţi că numărul 2010! este divizibil cu 3^{1000} (unde $2010! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2010$).

b) Arătaţi că $(2010!)^3 + 3^{2010}$ nu este pătrat perfect.

Soluţie. a) În produsul 2010! există 670 de multipli de 3; dintre aceştia, 222 sunt divizibili cu 3^2, 74 sunt divizibili cu 3^3, 24 sunt divizibili cu 3^4, 8 sunt divizibili cu 3^5 şi 2 sunt divizibili cu 3^6. Astfel, produsul conţine factorul 3 de $670 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 1000$ de ori.................................. **3p**

b) Dăm factor comun pe 3^{2010} şi rămânem cu o expresie de forma $a^3 + 1$, cu $a \vdots 3$, care ar trebui să fie pătrat perfect............ **2p**

Să presupunem că $a^3 + 1 = t^2$. Atunci $t^2 = (a+1)(a^2-a+1)$, cu $(a+1, a^2-a+1) = (a+1, 3) = 1$, deci, $a+1$ şi a^2-a+1 sunt pătrate. Dar $(a-1)^2 < a^2 - a + 1 < a^2$, deci $a^2 - a + 1$ nu poate fi pătrat perfect..... **2p**