Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Bucureşti, 20.11.2010

Bareme şi soluții. Clasa a VIII-a

1. **a)** Avem $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}$. **2 p**

$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}=3-2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$. **1 p**

Rezultă că $a=3$ şi $b=-2$. **1 p**

b) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{5}=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}\right]^{5}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{10}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}}$. **2 p**

$\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}}<\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{1}{1024}<\dfrac{1}{1000}=0,001$. **1 p**

2. **a)** Relația este echivalentă cu $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b+1}\geq\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+1}$. **1 p**

sau $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b+1}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+1}\geq 0$, **1 p**,

adică $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\dfrac{a-b}{(a+1)\cdot(b+1)}\geq 0$. **1 p**

b) Avem $1\leq\dfrac{\sqrt{a}}{a+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+1}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. **2 p**

Rezultă că $\dfrac{\sqrt{a}}{a+1}=\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{\sqrt{b}}{b+1}=\dfrac{1}{2}$. **1 p**

Adică $a=b=1$. **1 p**

3. Deoarece $|a|+|b|\geq|a+b|$ şi $|a|=|-a|$, pentru orice numere reale *a* şi *b*, **2 p**

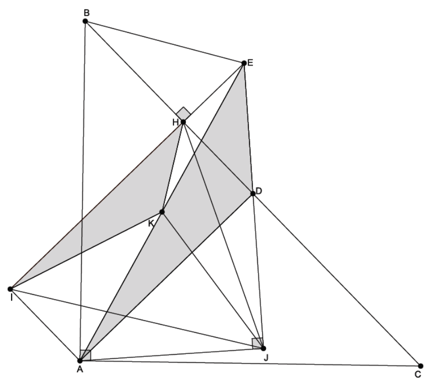
avem $3\geq\left|4x^{2}-1\right|+|4x-5|\geq\left|4x^{2}-4x+4\right|=\left|(2x-1)^{2}+3\right|\geq 3$, **2 p**,

deci $(2x-1)^{2}=0$, **2 p**

rezultă că $x=\dfrac{1}{2}$. **1 p**

4. **a)** Deoarece arcul $\overset{\frown}{BC}$ din cercul $C(A;AB)$ are 90°, rezultă că măsura arcului mare $\overset{\frown}{BC}$ din acest cerc are $360^{\circ}-90^{\circ}=270^{\circ}$. **1 p**

Cum $m\left(\widehat{BEC}\right)=135^{\circ}$, rezultă că $E\in C(A;AB)$, deci $AE=AB$. **1 p**



b) Se consideră dreptunghiul *ADHI* şi *K* mijlocul segmentului $\left[AE\right]$. Rezultă că patrulaterul *AJEI* este inscriptibil în cercul $C\left(K; AE=\frac{AB}{2}\right)$. **1 p**

Cum triunghiul *KIA* este isoscel, rezultă că $\widehat{KIH} \equiv \widehat{DAE}$.

Dar $\frac{HI}{AE}=\frac{KI}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci triunghiurile *KIH* şi *DAE* sunt asemenea. **1 p**

Deducem că $\widehat{KHI} \equiv \widehat{DEK} \equiv \widehat{DJK}$. **1 p**

Înseamnă că patrulaterul *EJKH*, deci $\widehat{JEK} \equiv \widehat{JHK}$ şi $\widehat{KJH} \equiv \widehat{KEH} \equiv \widehat{KIH}$. **1 p**

Cum $KI = KJ$, deducem că triunghiurile *HKI* şi *HKJ* sunt congruente, deci $HJ = HI = AD$. **1 p**