Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Bucureşti, 20.11.2010

Bareme şi soluții

Clasa a VII-a

1. Avem $2A=2^{a+1}\cdot 3^{b}$, iar $3A=2^{a}\cdot 3^{b+1}$ **2 p**

Numărul A are $(a+1)\cdot(b+1)$ divizori, numărul $2A$ are $(a+2)\cdot(b+1)$ divizori iar numărul 3A are $(a+1)\cdot(b+2)$ divizori **2 p**

Obținem $(a+2)\cdot(b+1)=(a+1)\cdot(b+1)+3$ şi $(a+1)\cdot(b+2)=(a+1)\cdot(b+1)+4$ **1 p**

Deci $b+1=3$ şi $a+1=4$, adică $a=3$ şi $b=2$ **2 p**

2. a) Numărul y este natural dacă $3n+1|28$. Obținem $n\in\{0,1,2\}$ **2 p**

Dacă $n=2$ numărul x este natural, de unde concluzia. **1 p**

b) Avem $x\cdot y=\dfrac{7\cdot(3n+2)}{3n+1}\in\mathbb{N}$. **1 p**

Deoarece $(3n+1;3n+2)=1$, rezultă că $3n+1\in D_7=\{1;7\}$ **2 p**

Rezultă că $n\in\{0;2\}$ **1 p**

3. a) Deoarece $x_1+x_2+...+x_8=0$, obținem $P_i=x_i\cdot(0-x_i)=-x_i^2$.**1 p**

Rezultă că $S_A=-\left(x_1^2+x_2^2+...+x_8^2\right)<0$. **1 p**

b) Fie $|x_1|<|x_2|<...<|x_8|$. Avem $x_1^2+x_2^2+...+x_8^2=200$.

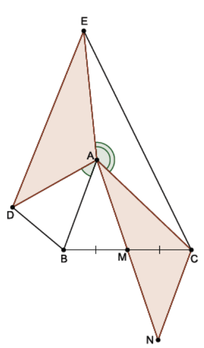
Suma celor mai mici 8 pătrate perfecte nenule este egală cu 204, rezultă că $x_1=0$. **1 p**

Dacă $|x_8|<8$, atunci suma pătratelor celor 8 elemente este mai mică decât 200.

Deci $|x_8|=8$ **1 p**

Obținem $|x_i|\in\{0,1,3,4,5,6,7,8\}$. **1 p**

Cum suma celor 8 module este 34 şi suma celor 8 elemente este 0, obținem $A=\{0,1,3,6,7,-4,-5,-8\}$, $A=\{0,1,4,5,7,-3,-6,-8\}$, $A=\{0,1,3,5,8,-4,-6,-7\}$ şi încă trei mulțimi formate cu opusele elementelor mulțimilor enumerate. **2 p**



4. Fie $N\in(AM$ astfel încât $MN=AM$. **1 p**

Triunghiurile AMB şi NMC sunt congruente (L.U.L)

Rezultă că $\widehat{MNC}\equiv\widehat{MAB}$, deci $NC\parallel AB$. **1 p**

Înseamnă că unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ACN}$ sunt suplementare. **1 p**

Cum $m\left(\widehat{BAC}\right)+m\left(\widehat{DAE}\right)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$, rezultă că

$\widehat{ACN}\equiv\widehat{EAD}$ (1). **1 p**

Din congruența triunghiurilor AMB şi NMC, deducem că $NC = AB$ şi, cum $AB = AD$, obținem $NC = AD$ (2). **1 p**

Din ipoteză, avem $AC = AE$ (3)

Din (1), (2) şi (3) rezultă că triunghiurile ACN şi EAD sunt congruente (L.U.L). **1 p**

Atunci, $AN = 2 \cdot AM = DE$, deci $AM = \frac{1}{2} \cdot DE$. **1 p**