

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

București, 07.11.2009

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că numărul $A = 998 \frac{99}{112} \cdot 997 \frac{99}{112} - 999 \frac{99}{112} \cdot 996 \frac{99}{112}$ este natural.
- b) Știind că numerele reale pozitive a și b verifică relația $\frac{4a-b}{a+2b} = \frac{1}{4}$, calculați valoarea raportului $\frac{a}{a+b}$.
2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul P situat în afara planului său astfel încât $PC = BD$. Dacă punctul Q este mijlocul segmentului $[PA]$, arătați că:
- a) dreapta PC este paralelă cu planul (QBD) ;
- b) $m(\sphericalangle BQD) = 90^\circ$.
3. În cercul $C(O; R)$ este înscris triunghiul dreptunghic isoscel ABC , $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. Pe segmentul (OC) se consideră punctul D astfel încât $OD = x$. Dacă $BD = b$ și $DC = a$, arătați că:
- a) $R^2 + x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ și $R^2 - x^2 = ab$;
- b) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b$.
4. Numerele raționale pozitive a, b, c , verifică relația $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2$. Arătați că:
- a) $c \geq 3$;
- b) numărul $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ este rațional.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează dela 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore efectiv.