

Societatea de Științe Matematice din România
Colegiul Național „Spiru Haret”, București
Centrul de Excelență „Sfântul Sava”, București
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul de matematică „Laurențiu Panaitopol”

București, 7 noiembrie 2009

SUBIECTELE

CLASELE XI – XII

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere naturale cu $a_0 > 0$ și cu proprietatea: „pentru orice $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} este un divizor prim al lui $a_n + 1$ ”. Arătați că, începând de la un anumit rang, șirul este periodic.

L. Panaitopol

Subiectul 2. Determinați toate numerele reale m pentru care ecuația

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - mx = 2$$

nu are soluții.

Subiectul 3. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ și z_1, z_2, z_3 numere complexe astfel încât

$$z_1^p + z_2^p + z_3^p = 0, \text{ pentru orice } p \in \{m, m + 1, m + 2\}.$$

Arătați că $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

Subiectul 4. În plan considerăm un sistem de coordonate și mulțimea \mathcal{C} a cercurilor având raza 0,01 și centre în punctele cu ambele coordonate întregi. Arătați că orice dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate taie o infinitate de cercuri din \mathcal{C} .

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.