Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Excelenţă ,,Sfâtul Sava", Bucureşti
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul de matematică ,,Spiru Haret"

Bucureşti, 22 noiembrie 2008

SUBIECTELE

CLASELE IX – X

Subiectul 1. Care este numărul maxim de elemente pe care le poate avea o mulţime finită M de numere reale strict pozitive, dacă ea are proprietatea:

oricum am lua trei elemente distincte din M, putem alege două diferite dintre ele astfel încât produsul lor să aparţină lui M.

Subiectul 2. Fie $k \neq \pm 1$ un număr întreg. Arătaţi că orice număr întreg poate fi reprezentat sub forma

$$\frac{(x+k)(y+k)}{x+y}, x, y \in \mathbb{Z}.$$

Subiectul 3. Fie $n \geqslant 2$ un număr întreg, mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi n submulţimi distincte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale lui A. Demonstraţi că există $x \in A$ astfel încât mulţimile $A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$ să fie distincte.

Subiectul 4. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $\angle ABC \equiv \angle BCD$, iar bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$ şi $\angle ADC$ taie segmentul (BC) în E, respectiv F. Fie $\mathcal{C}$ cercul de diametru $[AD]$. Demonstraţi că E se află pe $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă F se află pe $\mathcal{C}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.