Concursul de matematică ,,Spiru Haret” – Soluţii VII – VIII

1. Notăm $A=\overline{abcdef}$ şi $B=\overline{defabc}$. Avem $100000 \leqslant B \leqslant A \leqslant 899999$. Cum $A+B=999999$ şi există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A=kB$, rezultă $(k+1)B=999999$. **(3p)**

Deci, $k+1$ este un divizor natural al lui 999999 cel mult egal cu 9, prin urmare $k+1\in\{1,3,7,9\}$. **(2p)**

Convine cazul $k+1=7$, deci $k=6$. Rezultă $A=857142$. **(2p)**

2. Dacă $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$, atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}$, unde $u=mq\in\mathbb{N}^*$ şi $v=np\in\mathbb{N}^*$. Arătăm că dacă $u,v\in\mathbb{N}^*$ şi $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\in\mathbb{N}$, atunci $u=v$. **(2p)**

Într-adevăr, dacă $v\not|\, u$, atunci după simplificarea fracţiei $\frac{u}{v}$ rămâne la numitor un factor prim x şi acelaşi factor rămâne la numărător după simplicarea fracţiei $\frac{v}{u}$, deci $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=\frac{y}{tx}+\frac{tx}{y}=\frac{y^2+t^2x^2}{txy}$ are numărătorul nedivizibil cu x (pentru că $x\not|\, y$), ceea ce implică $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\notin\mathbb{N}$. Analog rezultă $u\mid v$, de unde $u=v$. **(4p)**

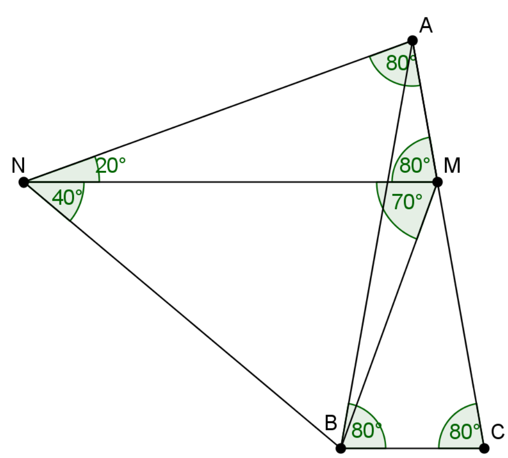
Din cele de mai sus rezultă că singurul element al intersecţiei este 2. **(1p)**

3. a) Mulţimile $A_1=\{1,2,\ldots 502,1507,1508,\ldots,2008\}$ şi $A_2=A\setminus A_1$ au, fiecare, suma elementelor egală cu $502\cdot 2009$. **(3p)**

b) Dacă n este par alegem cele $\frac{n}{2}$ mulţimi $A_i=\{i,n+1-i\}, 1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}$. **(2p)**

Dacă n este impar alegem cele $\frac{n-1}{2}$ mulţimi $A_i=\{i,n-i\}, 1\leqslant i\leqslant \frac{n-1}{2}$ şi mulţimea $A_{\frac{n+1}{2}}=\{n\}$. **(2p)**

4. Fie N punctul din semiplanul determinat de dreapta AC şi punctul B pentru care $\triangle NMA\equiv\triangle ABC$. **(4p)**



Rezultă că $m(\angle BAN)=60°$, deci triunghiul NAB este echilateral. Prin urmare, triunghiul NMB este isoscel, având $NM=NB$ şi $m(\angle MNB)=40°$. Deci, $m(\angle NMB)=70°$. În final, $m(\angle BMC)=30°$. **(3p)**