INEGALITATEA IONESCU - WEITZENBÖCK

D. M. BĂTINEȚU-GIURGIU[1] şi NECULAI STANCIU[2]

Scopul acestui articol este de a demonstra că vestita inegalitate *Weitzenböck* trebuie să se numească inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck.*

În Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 2 , Octombrie 1897, la pagina 52, *Ion Ionescu*, fondatorul Gazetei Matematice, a publicat problema:

***273.** Să se arate că nu există nici un triunghiu pentru care neegalitatea:

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$$

să fie satisfăcută.

(I. IONESCU.)

Soluția problemei 273, apare în Gazeta Matematică, Vol. III (15 Septembrie 1897 – 15 August 1898), Nr. 12 , August 1898, la paginile 281, 282 şi 283, după cum urmează:

***Problema 273**. - *Să se arate că nu există nici un triunghiu pentru care neegalitatea:*

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2$$

să fie satisfăcută.

(I. IONESCU.)

Soluțiune dată de D-l ***N. G. Muzicescu*** (Student, Iaşi).

Fie ABC un triunghi oare-care, construim de o parte şi de alta a laturei BC triunghiurile echilaterale BCA' şi BCA''; punctul de întâlnire M, al laturilor $A'A''$ şi BC va fi la mijlocul fie-căreia din aceste două drepte.

Fie $AA' = d$ şi $AA'' = d'$.

Din triunghiul $AA'A''$, deducem prin aplicarea unor teoreme cunoscute:

$$(1) \quad d^2 + d'^2 = 2 \cdot AM^2 + 2 \cdot A''M^2$$

$$(2) \quad d^2 - d'^2 = 4 \cdot A''M^2 \cdot MH\,;$$

iar din triunghiul dat ABC, deducem:

$$(3) \; b^2 + c^2 = 2 \cdot AM^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Pe de altă parte $A''M$ fiind înălțimea unui triunghiu echilateral de latură a avem:

$$(4) \quad A''M = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\,.$$

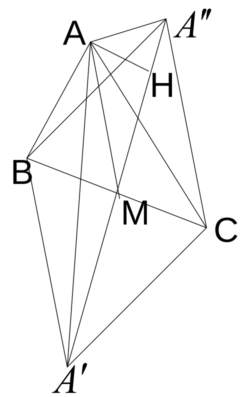
Din relațiile (1), (2), (3) şi (4) deducem:

$$(5) \quad d^2 + d'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

---

[1] Profesor, Colegiul Național "Matei Basarab" , Bucureşti, România
[2] Profesor, Şcoala generală "George Emil Palade" , Buzău, România

$$(6) \quad d^2 - d'^2 = 2a \cdot MH\sqrt{3}\,,$$



însă: $2a \cdot MH$ reprezintă de 4 ori suprafaţa triunghiului ABC, căci MH este evident egal cu înălţimea acestui triunghiu; făcând înlocuirea şi scăzând pe (6) din (5), avem:

$$2d'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}$$

de unde:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}\,,$$

iar inegalitatea contrarie este imposibilă.

Soluţiune dată de D-nii: ***I. Moscuna*** (Bucureşti) şi ***I. Penescu*** (Bucureşti).

Avem:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A\,,\; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,,\; \sqrt{3} = \operatorname{cotg} 30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0}\,.$$

Înlocuind, simplificând cu 2, şi oprind în membrul II numai $b^2 + c^2$ avem:

$$bc\left(\sin A \cdot \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} + \cos A\right) > b^2 + c^2\,,$$

care ne dă:

$$(1) \qquad 2bc\sin(A + 30^0) > b^2 + c^2\;.$$

Pe de altă parte avem:

$$(b-c)^2 \geq 0\,,$$

care ne dă:

$$(2) \qquad 2bc \leq b^2 + c^2$$

Pentru ca neegalitatea (1) să poată fi satisfăcută trebue ca $A < 150^0$, căci alt-fel membrul I ar fi negaliv şi nu ar putea fi mai mare ca membrul II care e pozitiv. Presupunând această condiţiune îndeplinită putem împărţi neegalitatea (1) prin (2) dând resultatului sensul neegalităţii (1). Avem ast-fel:

$$(3) \qquad \sin(A + 30^0) > 1\,.$$

Această neegalitate e imposibilă, sinusul neputând fi mai mare ca unitatea. Deci neegalitatea (1) şi prin urmare şi cea dată este imposibilă pentru ori-ce triunghiu. Dacă (3) şi (2) devin egalităţi, atunci (1) devine egalitate. Pentru aceasta trebue ca $A+30^0=90^0$, adică $A=60^0$ şi $b=c$, adică triunghiul să fie echilateral. Aşa dar neegalitatea dată devine egalitate pentru ori-ce triunghiu echilateral.

Soluţiune dată de D-ra ***Maria Rugesu*** (Studentă, Iaşi) şi de *D-nii*: ***Th. M. Vladimirescu*** (Râmnicul Vâlcei); ***G. G. Urechilă*** şi ***I. Sichitiu*** (Sc. Sp. De Art. şi Geniu) şi ***Corneliu P. Ionescu*** (Elev Cl. VI Lic. Galaţi).

Neegalitatea dată ne dă succesiv:

$$4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot\sqrt{3}>a^2+b^2+c^2,$$

$$16\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)\cdot 3>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot[2bc+c^2+b^2-a^2][2bc+a^2-b^2-c^2]>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot[4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2]>(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$3\cdot[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]>a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2,$$

$$4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2-4a^4-4b^4-4c^4>0,$$

$$2[2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2]<0,$$

$$2[(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2]<0.$$

Dar această din urmă neegalitate e imposibilă, toţi termenii din membrul I fiind pozitivi.

Deci şi neegalitatea dată este imposibilă pentru ori-ce triunghiu.

Ultima neegalitate se transformă în egalitate numai când $a=b=c$, adică când triunghiul e echilateral, neegalitatea dată devine egalitate.

Au mai rezolvit această problemă pe alte căi şi D-nii: *A. Iliovici, I. Nicolaescu, Emil G. Niţescu, V. V. Cambureanu* şi *C. Vintilă*.

În anul 1919, *Roland Weitzenböck* a publicat în Mathematische Zeitschrift, Vol. 5, Nr. 1-2, pp. 137-146 articolul *Uber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*, în care demonstrează că:

În orice triunghi ABC, cu notaţiile obişnuite, are loc inegalitatea:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S \qquad \text{(W)}$$

Observăm că inegalitatea lui *Ion Ionescu* este aceeaşi cu inegalitatea lui *Weitzenböck*, şi de aceea începând din acest moment inegalitatea *Weitzenböck* (W) trebuie să se numească inegalitatea ***Ionescu-Weitzenböck*** (I-W). Inegalitatea ***Ionescu – Weitzenböck***, la a *III-a O.I.M., Veszprém, Ungaria, 8-15 iulie 1961* a fost dată spre rezolvare concurenţilor.

Un număr de 11 demonstraţii ale inegalităţii (I-W) au fost prezentate de *Arthur Engel* în cartea *Problem solving strategies*, Springer Verlag, 1998.

Ne propunem să prezentăm pentru această frumoasă inegalitate alte *23 de demonstrații* şi 10 *generalizări* după cum urmează:

Demonstrații:

Demonstrația 1. $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3} \cdot p \cdot p$, şi conform inegalității lui *Mitrinović*, adică $p \geq 3\sqrt{3}r$, inegalitatea precedentă devine:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3} \cdot p \cdot 3\sqrt{3}r = 4\sqrt{3}pr = 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 2. Conform inegalității mediilor avem:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} ,$$

iar conform inegalității lui *G. Pólya* şi *G. Szegö* avem:

$$(abc)^2 \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$$, iar inegalitatea precedentă devine:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3} = 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 3. În conformitate cu inegalitatea *Cauchy-Buniacovski-Schwarz* avem:

$$(a^2+b^2+c^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2) \geq \left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq \left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(am_a+bm_b+cm_c\right) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(ah_a+bh_b+ch_c\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6S = 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 4. Conform inegalității lui *Cebâşev* avem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3(a+b+c) \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \geq 3abc(a+b+c)$$

şi deoarece $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, rezultă că:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3abc \cdot 2p = 24pRS ,$$

de unde conform inegalității lui *Euler* $R \geq 2r$, deducem că :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 24pS \cdot 2r = 48Spr = 48S^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{48}S = 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 5. Avem: $ab+bc+ca = 2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

Deoarece funcția $f:(0,\pi) \to R,\ f(x) = \frac{1}{\sin x}$ este convexă pe $(0,\pi)$,

$\left(f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0\right)$ conform inegalității lui *Jensen* avem;

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 3\cdot\frac{1}{\sin\frac{A+B+C}{3}}=3\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$$, şi atunci obţinem :

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S .$$

Demonstraţia 6. Avem:

$$a^2+b^2+c^2=(2p-b-c)^2+(2p-c-a)^2+(2p-a-b)^2=$$
$$=(p-a+p-c)^2+(p-c+p-a)^2+(p-a+p-b)^2\geq$$
$$\geq 4(p-a)(p-b)+4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a)=$$
$$=4p(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p(p-a)}+\frac{1}{p(p-b)}+\frac{1}{p(p-c)}\right)=$$
$$=\frac{4S^2}{p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$$, apoi ţinând cont de binecunoscuta:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{\sqrt{3}}{r}$$, obţinem că :

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{4S^2}{p}\cdot\frac{\sqrt{3}}{r}=\frac{4\sqrt{3}S^2}{S}=4\sqrt{3}S .$$

Demonstraţia 7. Avem : $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq abc(a+b+c)=2p\cdot 4RS=8pRS$,
şi conform inegalităţii lui *Euler* ($R\geq 2r$)deducem că : $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq 16S^2$.
Deci : $(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)=16S^2+16pRS$,
unde folosim din nou inegalitatea lui *Euler* ($R\geq 2r$) şi deducem că:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 16S^2+16p(2r)S=16S^2+32S^2=48S^2$$, adică:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S .$$

Demonstraţia 8. Avem:

$$a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p}$$ şi analoagele de unde deducem că:

$$ab=\frac{r_ar_b(r_b+r_c)(r_a+r_c)}{p^2}\geq\frac{4r_ar_br_c\sqrt{r_ar_b}}{p^2}$$, şi deoarece $r_ar_br_c=rp^2$, rezultă $ab\geq 4r\sqrt{r_ar_b}$.

Deci, $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq 16r^2(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)$, şi deoarece $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$,
obţinem : $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq 16r^2p^2=16S^2$ şi apoi ca în Demonstraţia7. obţinem

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S .$$

Demonstraţia 9. Considerăm în afara triunghiului ABC punctul D astfel încât triunghiul ACD este echilateral.Fie E şi F mijloacele segmentelor $[BD]$ şi $[AC]$.Conform teoremei lui *Euler* în patrulaterul $ABCD$ avem:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=BD^2+AC^2+4EF^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2+a^2+b^2+b^2=BD^2+b^2+4EF^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=BD^2+4EF^2 .$$

Rezultă din teoremei cosinusului în triunghiul ABD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD = c^2 + b^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(\cos A\cos\frac{\pi}{3} - \sin A\sin\frac{\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A =$$
$$= b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + 2\sqrt{3}S = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}.$$

Deci,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2} + 4EF^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = 8EF^2,$$

şi deoarece $EF^2 \geq 0$, obţinem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstraţia 10. În inegalitatea *Stevin-Bottema*:

$$(x + y + z)^2 R^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2, \forall x, y, z \in R_+^*,$$

luăm $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ şi obţinem:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 R^2 \geq 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)R \geq \sqrt{3}abc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 11. Fie T punctul lui *Fermat-Toricelli* (centrul izogon) al triunghiului ABC. Notăm $TA = x, TB = y, TC = z$ şi avem $\mu(\angle ATB) = \mu(\angle BTC) = \mu(\angle CTA) = \frac{2\pi}{3}$.

Conform teoremei cosinusului în triunghiurile BTC, CTA, ATB avem respectiv:

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\frac{2\pi}{3} = y^2 + z^2 + yz;\, b^2 = z^2 + x^2 + zx;\, c^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

Prin urmare:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx \geq 3(xy + yz + zx) =$$
$$= 3\left(xy\sin\frac{2\pi}{3} + yz\sin\frac{2\pi}{3} + zx\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{3}} =$$
$$= 3(2ariaTAB + 2ariaTCB + 2ariaTCA) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$$
$$= 4\sqrt{3}(ariaTAB + ariaTCB + ariaTCA) = 4\sqrt{3}ariaABC = 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 12. Dacă în prima inegalitate a lui *Tsintsifas*:

$$\frac{m}{n + p}a^2 + \frac{n}{m + p}b^2 + \frac{p}{m + n}c^2 \geq 2\sqrt{3}S, \forall m, n, p \in R_+^*,$$

luăm $m = n = p = 1$, atunci obţinem:

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\sqrt{3}S \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Demonstraţia 13. Dacă în a doua inegalitate a lui *Tsintsifas*, adică: dacă $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt două triunghiuri de laturi a_1, b_1, c_1, respectiv a_2, b_2, c_2 şi arii S_1 şi S_2, atunci avem inegalitatea:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S_1S_2}.$$

Deci, dacă luăm $A_1B_1C_1 \equiv A_2B_2C_2 \equiv ABC$, obţinem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S^2} = 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 14. Teorema *Jakob-Steiner*, afirmă că dintre toate triunghiurile de acelaşi perimetru, cel de arie maximă este triunghiul echilateral.Fie S_3 aria triunghiului echilateral de perimetru $2p$ şi S aria unui triunghi de perimetru $2p$.Deci, conform teoremei *Jakob-Steiner* avem:

$$S_3 \geq S \Leftrightarrow \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq S \Leftrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3}S .$$

Apoi, conform inegalității dintre media aritmetică şi media pătratică avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4p^2}{3} .$$

Rezultă că: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3} \cdot p^2 \geq \frac{4}{3} \cdot 3\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 15. *Murray S. Klamkin* a stabilit că: dacă $x, y, z \in R$, atunci în orice triunghi ABC, are loc:

$$\left(\frac{ax+by+cz}{4S}\right)^2 \geq \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă:

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)} .$$

Dacă luăm în inegalitatea lui *Murray S. Klamkin*, $x = a, y = b, z = c$, atunci obținem:

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\right)^2 \geq 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 16. *A. Oppenheim* a stabilit că: dacă $x, y, z \in R_+^*$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\left(a^2x + b^2y + c^2z\right)^2 \geq 16S^2\left(xy + yz + zx\right).$$

Dacă considerăm $x = y = z = 1$, atunci deducem:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 16S^2 \cdot 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S .$$

Demonstrația 17. Tot *Murray S. Klamkin* a stabilit şi inegalitatea:

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\right)^2 \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 3,$$

din care obținem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 18. Conform teoremei cosinusului avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geq 2bc - 2bc\cos A = 2bc(1-\cos A) = 4bc\sin^2\frac{A}{2} =$$

$$= 4bc\sin A \cdot \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A} = 8S \cdot \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = 4S \cdot tg\frac{A}{2},$$

şi analoagele; de unde deducem că:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right).$$

Deoarece, funcția $h:(0,\pi)\to R, h(x)=tg\frac{x}{2}$ este convexă pe $(0,\pi)$ rezultă conform inegalității lui *Jensen* că: $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\geq 3tg\frac{A+B+C}{3}=3tg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

Deci, am obținut că: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 19. Avem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\frac{4}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\geq\frac{4}{3}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}\cdot\frac{(m_a+m_b+m_c)^2}{3}\geq$$

$$\geq\frac{4}{27}(a+b+c)^2(h_a+h_b+h_c)^2\geq\frac{4}{27}\left(3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\right)^2=12\left(\sqrt[3]{ah_abh_bch_c}\right)^2=$$

$$=12\left(\sqrt[3]{2^3S^3}\right)^2=48S^2,$$

de unde se deduce ușor că: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 20. Pentru orice punct $M\in IntABC$ notăm $d_a(M), d_b(M), d_c(M)$ distanțele de la punctul M respectiv la dreptele BC, CA, AB și $s_a(M)=A[MBC], s_b(M)=A[MCA], s_c(M)=A[MAB]$. Vom arăta că:

$$\frac{a}{d_a(M)}+\frac{b}{d_b(M)}+\frac{c}{d_c(M)}\geq 6\sqrt{3}.$$

Într-adevăr, avem:

$$T=\frac{a}{d_a(M)}+\frac{b}{d_b(M)}+\frac{c}{d_c(M)}=\frac{a^2}{ad_a(M)}+\frac{b^2}{bd_b(M)}+\frac{c^2}{cd_c(M)}=$$

$$=\frac{a^2}{2s_a(M)}+\frac{b^2}{2s_b(M)}+\frac{c^2}{2s_c(M)},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *Bergström* și obținem:

$$T\geq\frac{(a+b+c)^2}{2\left(s_a(M)+s_b(M)+s_c(M)\right)}=\frac{4p^2}{2S}=\frac{2p^2}{pr}=\frac{2p}{r},$$

apoi conform inegalității lui *Mitrinović* ($p\geq 3\sqrt{3}r$) deducem că:

$$T\geq\frac{2p}{r}\geq\frac{2\cdot 3r\sqrt{3}}{r}=6\sqrt{3}.$$

Dacă luăm $M=G$, atunci :

$$s_a(G)=s_b(G)=s_c(G)=\frac{1}{3}S,$$

și rezultă că:

$$T=\frac{a^2}{2s_a(M)}+\frac{b^2}{2s_b(M)}+\frac{c^2}{2s_c(M)}=\frac{a^2}{\frac{2}{3}S}+\frac{b^2}{\frac{2}{3}S}+\frac{c^2}{\frac{2}{3}S}\geq 6\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{2}{3}S\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}S.$$

Demonstrația 21. Conform inegalității *Neuberg – Pedoe* avem:

Dacă $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *sunt două triunghiuri de laturi* a_1, b_1, c_1 *și* a_2, b_2, c_2 *de arii* S_1 *și respectiv* S_2, *atunci are loc inegalitatea*:

$$a_1^2\left(-a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)+b_1^2\left(a_2^2-b_2^2+c_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)\geq 16S_1S_2\,.$$

Dacă luăm triunghiul $A_2B_2C_2$ echilateral de laturi $a_2=b_2=c_2=1$, avem $S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ și atunci rezultă că $a_1^2+b_1^2+c_1^2\geq 16S_1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}S_1$.Deci într-un triunghi ABC are loc inegalitatea: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

Demonstrația 22. Conform unei inegalități a lui *A. Oppenheim* :

Dacă $x, y, z\in R_+$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notațiile obișnuite, are loc inegalitatea:*

$$(x+y+z)^2\geq 2\sqrt{3}(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C)$$

cu egalitate $\Leftrightarrow x=y=z$ *și triunghiul* ABC *este echilateral.*

Dacă luăm $x=a, y=b, z=c$, atunci obinem:

$$(a+b+c)^2\geq 2\sqrt{3}(bc\sin A+ca\sin B+ab\sin C)=2\sqrt{3}\cdot 6S=12\sqrt{3}S\,.$$

Deoarece, $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, rezultă că:

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq\frac{12\sqrt{3}S}{3}=4\sqrt{3}S\,.$$

Observație. Procedând ca mai sus:

$(a+b+c)^2\geq 12\sqrt{3}S\Leftrightarrow 4p^2\geq 12\sqrt{3}S=12\sqrt{3}pr\Leftrightarrow p\geq 3\sqrt{3}r$, deci am obținut o nouă demonstrație pentru inegalitatea lui *Mitrinović*.

Demonstrația 23. *În orice triunghi are loc inegalitatea:*

$$c^2\geq (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}.$$

Într-adevăr:

$$ab(c^2-(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2})=abc^2-ab(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}=abc^2-(a+b)^2(p-a)(p-b)=$$

$$=abc^2-(a+b)^2\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4}=\frac{4abc^2-a^2c^2-b^2c^2-2abc^2+(a-b)^2(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)^2-c^2(a^2-2ab+b^2)}{4}=\frac{(a-b)^2\left((a+b)^2-c^2\right)}{4}=$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b-c)(a+b+c)}{4}=p(p-c)(a-b)^2\geq 0$$, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b$.

Deci,

$$a^2+b^2+c^2\geq (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}+(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(c+a)^2\sin^2\frac{B}{2}\geq$$

$$\geq 4ab\sin^2\frac{C}{2}+4bc\sin^2\frac{A}{2}+4ca\sin^2\frac{B}{2}=8S\left(\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C}+\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin B}\right)=$$

$$=4S\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right),$$

unde deoarece funcţia $f:(0,\pi]\to R_+^*,\ f(x)=tg\frac{x}{2}$, este convexă pe $(0,\pi]$, rezultă că:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4S\cdot 3\cdot tg\frac{A+B+C}{6}=12S\cdot tg\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}S.$$

Generalizări

Generalizarea 1. *Dacă* $m\in[1,\infty)$*, atunci în orice triunghi* ABC*, are loc inegalitatea:*

$$a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}\geq 3\cdot\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^m.$$

Demonstraţia 1. Avem:
$a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}=(a^2)^m+(b^2)^m+(c^2)^m$, de unde dacă ţinem seama că funcţia $u:R_+^*\to R_+^*, u(x)=x^m$ este crescătoare şi convexă pe R_+^* şi aplicăm inegalitatea *Jensen* obţinem:

$$u(a^2)+u(b^2)+u(c^2)\geq 3u\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)\geq 3u\left(\frac{4\sqrt{3}S}{3}\right)=3u\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}\geq 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^m\geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^m.$$

Demonstraţia 2. Deoarece funcţia $f:R_+^*\to R_+^*,\ f(x)=x^{2m}$, este convexă pe R_+^* conform inegalităţii lui *Jensen* avem:

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{1}{3}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\Leftrightarrow a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}\geq\frac{1}{3^{2m-1}}(2p)^{2m}=$$

$$=\frac{4^m p^{2m}}{3^{2m-1}}=\frac{4^m p^m r^m p^m}{3^{2m-1}r^m}=\frac{4^m S^m}{3^{2m-1}}\left(\frac{p}{r}\right)^m.$$

Conform inegalităţii lui *Mitrinović* avem $\frac{p}{r}\geq 3\sqrt{3}$, şi din relaţia precedentă obţinem ceea ce era de demonstrat.

Demonstraţia 3. Conform inegalităţii lui *J. Radon* avem:
$a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}\geq\frac{(a+b+c)^{2m}}{3}=\frac{4^m p^{2m}}{3^{2m-1}}$, şi mai departe procedăm ca în demonstraţia 2.

Generalizarea 2. *Dacă* $m\in[2,\infty)$*, atunci în orice triunghi* ABC*, are loc inegalitatea:*

$$\frac{a^m + b^m + c^m}{3} \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Demonstrație. Avem:

$a^m + b^m + c^m = (a^2)^{\frac{m}{2}} + (b^2)^{\frac{m}{2}} + (c^2)^{\frac{m}{2}}$, şi deoarece funcţia $v : R_+^* \to R_+^*$, $v(x) = x^{\frac{m}{2}}$ este crescătoare şi convexă pe R_+^*, atunci conform inegalităţii lui *Jensen* rezultă că:

$$v(a^2) + v(b^2) + v(c^2) \geq 3v\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right) \geq 3v\left(\frac{4\sqrt{3}S}{3}\right) = 3v\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^m + b^m + c^m \geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Generalizarea 3. *Dacă funcţia* $w : R_+^* \to R_+^*$ *este convexă şi crescătoare pe* R_+^**, atunci în orice triunghi* ABC*, are loc inegalitatea:*

$$w(a^2) + w(b^2) + w(c^2) \geq 3w\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right).$$

Demonstrație. Conform inegalităţii lui *Jensen* avem:

$$w(a^2) + w(b^2) + w(c^2) \geq 3w\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right),$$

de unde ţinem cont de (I-W) şi de faptul că w este crescătoare pe R_+^* obţinem:

$$w(a^2) + w(b^2) + w(c^2) \geq 3w\left(\frac{4S\sqrt{3}}{3}\right) = 3w\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right).$$

Generalizarea 4. *Dacă* $m, x, y, z \in R_+$ *şi* $x + y + z \in R_+^*$*, atunci în orice triunghi* ABC*, are loc inegalitatea:*

$$\frac{a^{m+2}}{(xa + yb + zc)^m} + \frac{b^{m+2}}{(xb + yc + za)^m} + \frac{c^{m+2}}{(xc + ya + zb)^m} \geq \frac{4\sqrt{3}S}{(x + y + z)^m}.$$

Demonstrație. Avem:

$$U = \frac{a^{m+2}}{(xa + yb + zc)^m} + \frac{b^{m+2}}{(xb + yc + za)^m} + \frac{c^{m+2}}{(xc + ya + zb)^m} =$$

$$= \frac{a^{2(m+1)}}{(xa^2 + yab + zac)^m} + \frac{b^{2(m+1)}}{(xb^2 + ybc + zab)^m} + \frac{c^{2(m+1)}}{(xc^2 + yac + zbc)^m} =$$

$$= \frac{(a^2)^{m+1}}{\left(xa^2 + \frac{y}{2}(a^2 + b^2) + \frac{z}{2}(a^2 + c^2)\right)^m} + \frac{(b^2)^{m+1}}{\left(xb^2 + \frac{y}{2}(b^2 + c^2) + \frac{z}{2}(a^2 + b^2)\right)^m} +$$

$$+ \frac{(c^2)^{m+1}}{\left(xc^2 + \frac{y}{2}(a^2 + c^2) + \frac{z}{2}(b^2 + c^2)\right)^m},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *J. Radon* şi (I-W) şi obţinem:

$$U \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^{m+1}}{\left(x(a^2+b^2+c^2)+y(a^2+b^2+c^2)+z(a^2+b^2+c^2)\right)^m} = \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+y+z)^m} \geq$$

$$\geq \frac{4\sqrt{3}S}{(x+y+z)^m}.$$

Generalizarea 5. *Dacă* $m \in R_+$, *cu notaţiile de la Demonstraţia 20., atunci avem* :

$$\frac{a^{m+2}}{d_a^m(M)} + \frac{b^{m+2}}{d_b^m(M)} + \frac{c^{m+2}}{d_c^m(M)} \geq 2^{m+2}(\sqrt{3})^{m+1}S.$$

Demonstraţie. Avem:

$$U = \sum \frac{a^{m+2}}{d_a^m(M)} = \sum \frac{a^{2(m+1)}}{a^m d_a^m(M)} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{2^m s_a^m(M)},$$

de unde conform inegalităţii lui *J. Radon* deducem că :

$$U \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^{m+1}}{2^m\left(s_a(M)+s_b(M)+s_c(M)\right)^m} = \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^{m+1}}{2^m S^m}$$, unde folosim faptul că :

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4p^2}{3}$$, şi rezultă că:

$$U \geq \frac{4^{m+1}p^{2(m+1)}}{2^m 3^{m+1} S^m} \geq \frac{2^{m+2}p^{m+1}\left(3\sqrt{3}r\right)^{m+1}}{3^{m+1}} = \frac{2^{m+2}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}(pr)^{m+1}}{S^m} = \frac{2^{m+2}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}S^{m+1}}{S^m} =$$

$$= 2^{m+2}(\sqrt{3})^{m+1}S.$$

Generalizarea 6. *Dacă* $m \in R_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea:*

$$\left(\frac{a^m+b^m+c^m}{3}\right)^{\frac{2}{m}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}S.$$

Demonstraţie. Avem:

$$S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ca\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$$, de unde $S^3 = \frac{(abc)^2\sin A\sin B\sin C}{8}$.

Deoarece, $\sin A+\sin B+\sin C \geq 3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$, rezultă că :

$$S^3 \leq \frac{a^2b^2c^2}{8}\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3$$, unde folosim faptul că :

$$\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$, şi deducem că:

$$S^3 \leq \frac{a^2b^2c^2}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \Leftrightarrow (abc)^2 \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Deci: $\frac{a^m+b^m+c^m}{3} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^m b^m c^m}}{3} = (abc)^{\frac{m}{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^m+b^m+c^m}{3}\right)^{\frac{2}{m}}\geq(abc)^{\frac{2}{3}}=\left((abc)^2\right)^{\frac{1}{3}}\geq\frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

Generalizarea 7. *Dacă* $x,y\in R_+$, $x+y\in R_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notațiile obişnuite , are loc inegalitatea:*

$$(xa+yb)^2+(xb+yc)^2+(xc+ya)^2\geq 4\sqrt{3}(x+y)^2S.$$

Demonstrație. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem:

$$U=(xa+yb)^2+(xb+yc)^2+(xc+ya)^2\geq\frac{(x+y)^2(a+b+c)^2}{3}=\frac{4p^2(x+y)^2}{3}.$$

Conform teoremei *Jakob-Steiner*: dintre toate triunghiurile de perimetru $2p$ cel de arie maximă este triunghiul echilateral.Fie deci S_3 aria triunghiului echilateral de perimetru $2p$ şi latură $a=\frac{2p}{3}$.Avem:

$$S_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4p^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{p^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow 9S_3=p^2\sqrt{3}\Leftrightarrow p^2=3\sqrt{3}S_3.$$

Aşadar,

$U\geq\frac{(x+y)^2(a+b+c)^2}{3}=\frac{4p^2(x+y)^2}{3}=4\sqrt{3}(x+y)^2S_3$, şi deoarece $S_3\geq S$ (conform teoremei *Jakob-Steiner*) rezultă că: $U\geq 4\sqrt{3}(x+y)^2S$.

Observație. Dacă $x=1, y=0$, atunci obținem inegalitatea lui *Weitzenböck.*

Generalizarea 8. *Dacă* $m,x,y\in R_+$, $x+y\in R_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notațiile obişnuite , are loc inegalitatea:*

$$(xa+yb)^{m+1}+(xb+yc)^{m+1}+(xc+ya)^{m+1}\geq 2^{m+1}(x+y)^{m+1}3^{\frac{3-m}{4}}S^{\frac{m+1}{2}}.$$

Demonstrație. Conform inegalității lui *J. Radon* avem:

$$V=(xa+yb)^{m+1}+(xb+yc)^{m+1}+(xc+ya)^{m+1}\geq\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}(a+b+c)^{m+1}=$$

$$=\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}p^{m+1}=\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}(p^2)^{\frac{m+1}{2}}.$$

Ca mai sus: $p^2=3\sqrt{3}S_3$ şi conform teoremei *Jakob-Steiner* $S_3\geq S$.

Deci,

$$V\geq\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}\left(p^2\right)^{\frac{m+1}{2}}=\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}\left(3\sqrt{3}S_3\right)^{\frac{m+1}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{(x+y)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}\left(3\sqrt{3}S\right)^{\frac{m+1}{2}}=2^{m+1}(x+y)^{m+1}3^{\frac{3-m}{4}}S^{\frac{m+1}{2}}\text{, q.e.d.}$$

Observație. Dacă $m=x=1, y=0$, atunci obținem inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck.*

Generalizarea 9. *Dacă* $x,y,z\in R_+, x+y+z\in R_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notațiile obişnuite , are loc inegalitatea:*

$$(xa+yb+zc)^2+(xb+yc+za)^2+(xc+ya+zb)^2\geq 4\sqrt{3}(x+y+z)^2S.$$

Demonstrație. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem:

$$U=(xa+yb+zc)^2+(xb+yc+za)^2+(xc+ya+zb)^2\geq\frac{(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{3}=$$
$$=\frac{4p^2(x+y+z)^2}{3}.$$
Ca mai sus: $p^2=3\sqrt{3}S_3$ şi conform teoremei *Jakob-Steiner* $S_3\geq S$.
Deci,
$$U\geq\frac{4(x+y+z)^2}{3}3\sqrt{3}S=4\sqrt{3}(x+y+z)^2S.$$
Observație. Dacă $x=1, y=z=0$, atunci obținem inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck.*
Generalizarea 10. *Dacă* $m,x,y,z\in R_+, x+y+z\in R_+^*$, *atunci în orice triunghi* ABC, *cu notațiile obişnuite , are loc inegalitatea:*
$$(xa+yb+zc)^{m+1}+(xb+yc+za)^{m+1}+(xc+ya+zb)^{m+1}\geq 2^{m+1}(x+y+z)^{m+1}3^{\frac{3-m}{4}}S^{\frac{m+1}{2}}.$$
Demonstrație. Conform inegalității lui *J. Radon* avem:
$$V=\sum(xa+yb+zc)^{m+1}\geq\frac{\left(\sum(xa+yb+zc)\right)^{m+1}}{3^m}=$$
$$=\frac{(x+y+z)^{m+1}(a+b+c)^{m+1}}{3^m}=\frac{(x+y+z)^{m+1}}{3^m}2^{m+1}p^{m+1}.$$
Ca mai sus: $p^2=3\sqrt{3}S_3$ şi conform teoremei *Jakob-Steiner* $S_3\geq S$.
Deci,
$$V\geq\frac{(x+y+z)^{m+1}2^{m+1}}{3^m}(p^2)^{\frac{m+1}{2}}\geq\frac{(x+y+z)^{m+1}2^{m+1}}{3^m}(3\sqrt{3}S)^{\frac{m+1}{2}}=$$
$$=2^{m+1}(x+y+z)^{m+1}3^{\frac{3-m}{4}}S^{\frac{m+1}{2}}\text{, q.e.d.}$$
Observație. Dacă $m=x=1, y=z=0$, atunci obținem inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck.*
În legătură cu inegalitatea lui *Ionescu-Weitzenböck* există în literatura de specialitate alte două inegalități celebre, şi anume:

- Inegalitatea *Hadwiger-Finsler*:
$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$
- Inegalitatea *Neuberg-Pedoe*: pentru un al doilea triunghi de arie T şi laurile de lungimi x,y,z avem:
$$a^2(y^2+z^2-x^2)+b^2(z^2+x^2-y^2)+c^2(x^2+y^2-z^2)\geq 16ST,$$
cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiurile sunt asemenea.

Remarcă. *La a XX-a O.I.M., Bucureşti, România în 1978 a fost propusă comisiei O.I.M. de către Cehoslovacia problema*:
Fie T_1 un triunghi de laturi a,b,c şi arie P, iar T alt triunghi de laturi u,v,w şi arie Q.
Să se demonstreze că:
$$a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2)\geq 16PQ.$$
Observăm că problema este de fapt inegalitatea *Neuberg–Pedoe.*
Demonstrație. Avem:

$P=\frac{1}{2}ab\sin C$, $Q=\frac{1}{2}uv\sin W$ şi $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, $w^2=u^2+v^2-2uv\cos W$, iar inegalitatea devine:

$$4abuv\sin C\sin W\le a^2\left(-u^2+v^2+u^2+v^2-2uv\cos W\right)+$$
$$+b^2\left(u^2-v^2+u^2+v^2-2uv\cos W\right)+c^2\left(u^2+v^2-u^2-v^2+2uv\cos W\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4abuv\sin C\sin W\le 2a^2v\left(v-u\cos W\right)+2b^2u\left(u-v\cos W\right)+2c^2uv\cos W\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4abuv\sin C\sin W\le 2a^2v^2-2a^2uv\cos W+2b^2u^2-2b^2uv\cos W+2c^2uv\cos W\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2abuv\sin C\sin W\le a^2v^2+b^2u^2-\left(a^2+b^2\right)uv\cos W+uv\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)\cos W$

$\Leftrightarrow a^2v^2+b^2u^2\ge 2abuv\left(\cos C\cos W+\sin C\sin W\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2v^2+b^2u^2-2abuv+2abuv\left(1-\cos(C-W)\right)\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(av-bu\right)^2+2abuv\left(1-\cos(C-W)\right)\ge 0$, ceea ce este evident.

Egalitate avem dacă şi numai dacă:

$av-bu=0$ şi $1-\cos(C-W)=0\Leftrightarrow av=bu$ şi $\cos(C-W)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a}{u}=\frac{b}{v}$ şi $C-W=0\Leftrightarrow \frac{a}{u}=\frac{b}{v}$ şi $C=W$, adică cele două triunghiuri sunt asemenea.