

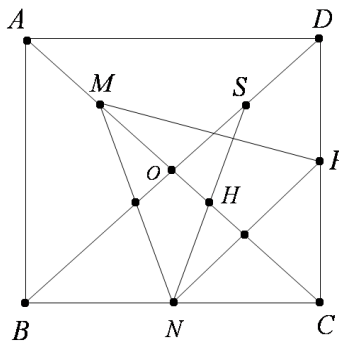
Asupra unei probleme de perpendicularitate

Idei elegante, metode neașteptate de rezolvare, raționamente meșteșugite: iată numai câteva dintre darurile cu care Matematica îi răsplătește pe împătimiții problemelor sale. Dacă vă numărați printre ei, vă propunem să vă delectați în continuare cu o problemă asupra unei configurații de puncte atât de bogat interrelaționate încât permit aplicarea unui întreg evantai de tehnici. Acestea conduc la o multitudine de soluții în care veți avea ocazia să observați particularitățile metodelor, precum și avantajele și dezavantajele fiecăreia.

Dăm cuvântul Geometriei:

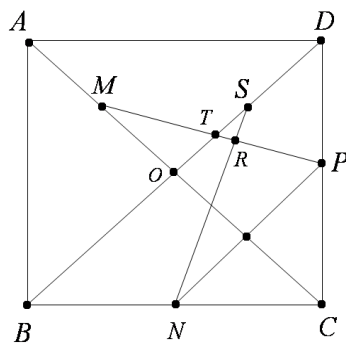
Fie pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul lui OA , N mijlocul lui BC , P mijlocul lui CD , S mijlocul lui OD , H ortocentrul triunghiului MNP . Să se demonstreze că punctele N, H, S sunt coliniare.

Dragoș Petrică și Cosmin Manea, Pitești, C.O.: 5180, G.M.B. nr. 2/2011.



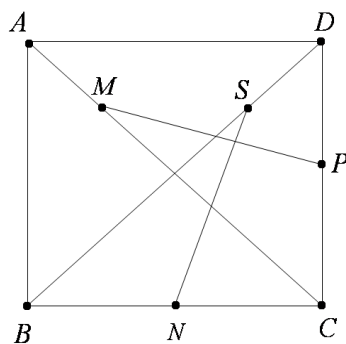
Să observăm pentru început că N, H și S sunt coliniare dacă și numai dacă NS trece prin H , adică NS este perpendiculară pe MP . Ignorând punctul H , problema se reduce la a demonstra că $NS \perp MP$.

Soluția 1. (sintetică)



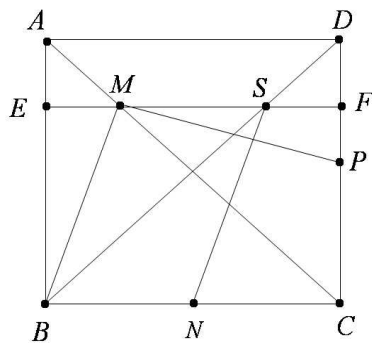
Deoarece $PC = BN$, $CM = BS$ și $\angle SBN = \angle PCM$, rezultă $\triangle PCM \equiv$,
 $\equiv \triangle BNS$, deci $\angle PMC = \angle BSN$
 Dar $\angle MTO = \angle STR$. Obținem $\angle SRT = \angle MOT = 90^\circ$.
 Deci $NS \perp MP$.

Soluția 2. (sintetică)



Triunghiurile PCM și NBS sunt congruente și au aceeași orientare.
Cum $PC \perp BN$, rezultă că $MP \perp NS$.

Soluția 3. (sintetică)



Vom demonstra că MP este perpendiculară pe o dreaptă paralelă cu

NS .

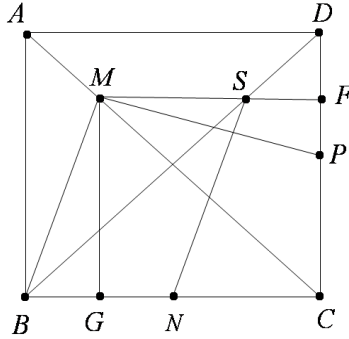
Avem: $MS \parallel AD$ și $MS = \frac{1}{2}AD$, $BN \parallel AD$ și $BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$.
Deci $BMSN$ este paralelogram, de unde $BM \parallel SN$.

Deoarece $PF = EM$, $MF = EB$ și $\angle MFP = \angle MEB$, rezultă $\triangle MFP \equiv \triangle BEM$, deci $\angle FMP = \angle EBM$.

Dar $\angle EBM = 90^\circ - \angle EMB$. Obținem:

$$\angle FMP + \angle EMB = 90^\circ \Rightarrow \angle BMP = 90^\circ \Rightarrow MP \perp SN.$$

Soluția 4. (sintetică)



Fie $MG \perp BC$, $G \in BC$.

Vom demonstra că $MP \perp BM$, de unde va rezulta că $MP \perp SN$.

Avem: $\triangle MFP \equiv \triangle MGB$.

Fiind la fel orientate și $FP \perp BG$, vom avea $PM \perp MB$.

Sau: din $\triangle MFP \equiv \triangle MGB \Rightarrow \angle FMP = \angle BMG$. Cum $\angle FMG = 90^\circ$, va rezulta $\angle BMP = 90^\circ$.

Sau: $\angle MPF = \angle MBG \Rightarrow BMPC$ este inscriptibil $\Rightarrow \angle BMP = 180^\circ - \angle PCB = 90^\circ$.

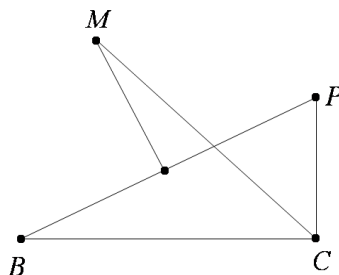
Soluția 5. (sintetică)

Vom utiliza un rezultat mai general și anume:

Fie $BMPC$ un patrulater în care: $PC \neq BC$, $\sphericalangle PCB = 90^0$, M se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle PCB$. Atunci: $BM = MP \Leftrightarrow \sphericalangle BMP = 90^0$.

În cadrul problemei este întâlnită această situație și cum $BM = MP$, va rezulta că $\sphericalangle BMP = 90^0$.

Demonstrăm în continuare acest rezultat:



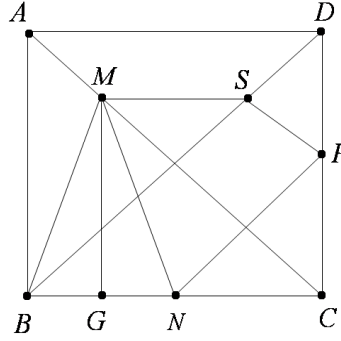
$BM = MP \Leftrightarrow M$ se află pe mediatoarea segmentului $[BP]$, adică M se află la intersecția dintre această mediatoare și bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCP$. Cum $PC \neq BC$, cele două drepte se intersectează într-un singur punct (nu sunt paralele și nici nu coincid), aflat pe cercul circumscris triunghiului BCP , adică pe cercul de diametru BP . Deci $BM = MP \Leftrightarrow \sphericalangle BMP = 90^0$.

Soluția 6. (sintetică)

Vom utiliza următorul rezultat:

Dacă A, B, C, D sunt patru puncte în plan, atunci:
 $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

Pentru demonstrația acestuia și pentru mai multe aplicații ale lui, puteți consulta [1].



Fie a latura pătratului. Avem:

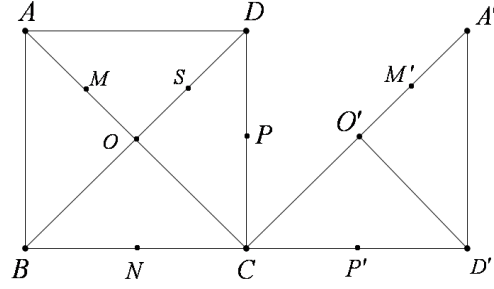
$$MS = \frac{a}{2}, NP = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SP = \frac{a\sqrt{2}}{4}, MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Atunci, } MN^2 - NP^2 = \frac{10a^2}{16} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{8},$$

$$\text{iar } SM^2 - SP^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{8}.$$

Cum $MN^2 - NP^2 = SM^2 - SP^2$, va rezulta $SN \perp MP$.

Soluția 7. (transformări geometrice)

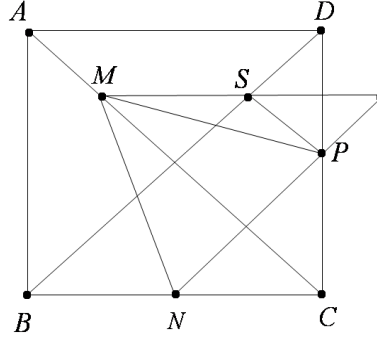


Considerăm rotația de centru C și unghi -90^0 , notată $r_c^{-90^0}$.

Fie A', D', M', O', P' imaginile punctelor A, D, M, O , respectiv P prin această rotație. Fie apoi translația ce duce C în B , adică translația de vector $\overrightarrow{CB}$, notată $t_{\overrightarrow{CB}}$.

Prin această translație, M' se transformă în S și P' în N . Deci dreapta MP se transformă în dreapta SN prin $t_{\overrightarrow{CB}} \circ r_c^{-90^0}$, de unde va rezulta că $SN \perp MP$.

Soluția 8. (vectorială)



Vom utiliza faptul că doi vectori sunt perpendiculari dacă și numai dacă produsul lor scalar este nul.

Avem: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SP}$ și $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PS}$.

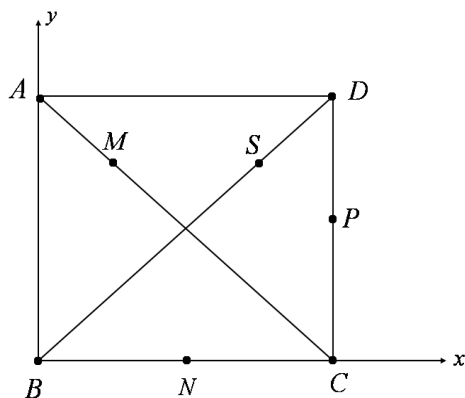
Notăm latura pătratului cu a . Obținem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NS} &= \overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PS} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + 0 - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8} = 0.\end{aligned}$$

Deci $MP \perp NS$.

Am folosit faptul că $SP \perp PN$, precum și măsurile unghiurilor dintre vectorii implicați în calcul.

Soluția 9. (analitică)



Considerând latura pătratului de lungime 1, punctele din figură vor avea următoarele coordonate:

$$B(0,0), A(0,1), C(1,0), D(1,1), M(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), N(\frac{1}{2}, 0), P(1, \frac{1}{2}), S(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}).$$

Calculăm pantele dreptelor NS și MP :

$$m_{NS} = \frac{y_S - y_N}{x_S - x_N} = 3, \quad m_{MP} = \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = -\frac{1}{3}$$

Cum $m_{NS} \cdot m_{MP} = -1$, vom avea $NS \perp MP$.

Soluția 10. (numere complexe)

Vom utiliza următorul rezultat:

$$SN \perp MP \Leftrightarrow \frac{Z_S - Z_N}{Z_M - Z_P} \text{ este pur imaginar.}$$

Atribuim lui O afixul 0 și lui D afixul 1. Atunci, celelalte puncte vor avea următoarele afixe:

$$A(i), B(-1), C(-i), M\left(\frac{i}{2}\right), N\left(\frac{-1-i}{2}\right), P\left(\frac{1-i}{2}\right), S\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Obținem } \frac{Z_S - Z_N}{Z_M - Z_P} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{-1-i}{2}}{\frac{i}{2} - \frac{1-i}{2}} = \frac{i+2}{2i-1} = -i.$$

Cum $-i$ este pur imaginar (are partea reală 0), va rezulta că $SN \perp MP$.

Bibliografie:

[1]. W.G. Boskoff, L. Homentcovschi, B.D. Suceavă, Some theorems perpendicular lines, proved with an extension of Pithagora's theorem. The Mathematical Gazette (London), 93, 1, (2009), 45-52.

Lect.dr. Laurențiu Homentcovschi, Universitatea "Ovidius", Constanța