Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 56(104) No. 4, 2013, 419–434

Topologie à l'infini et variétés à géométrie bornée

by
Renata Grimaldi et Valentin Poénaru

Résumé

Nous donnons un panorama des résultats obtenus par les auteurs sur la topologie asymptotique et la géométrie des variétés à géométrie bornée. Nous nous intéressons en particulier aux conditions "gentilles" à l'infini et aux liens entre elles et les types de croissance de ces variétés.

Abstract

We give a quick review on the asymptotic topology and the geometry of manifolds with bounded geometry, by quoting also some results obtained by the authors. In particular we will focus on tameness conditions at infinity and on the links between them and the growth-types of such manifolds.

Key Words : Bounded geometry, growth, filling area, finite topological type, simple connectivity at infinity, geometric simple connectivity, quasi-simple filtration (QSF).

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 53C23 ;
Secondary 53C20, 57M07, 57M10.

1 Introduction

L'un des thèmes le plus mystérieux en géométrie riemannienne est la relation entre la géométrie (courbure, rayon d'injectivité, systole, etc.) et la topologie (type d'homotopie, homologie, comportement topologique des bouts, etc.), et donc, il est utile, mais pas simple, de trouver des conditions géométriques qui assurent des résultats de finitude pour la topologie. Afin de mieux comprendre la géométrie et la topologie des variétés non compactes, il s'avère important d'avoir le plus d'information possible du comportement asymptotique des invariants géométriques (par exemple : la croissance du volume, l'entropie topologique ou le volume minimale) comme fonctions de la distance d'un point fixé.

Parmi les variétés non compactes, celles qui nous intéressent ici sont les *variétés à géométrie bornée*. Il s'agit, grosso modo, des variétés dont la "complexité géométrique" est bornée (dans le sens que le rayon d'injectivité admet une borne inférieure et la courbure (en module) une borne supérieure), et donc, c'est dans cette classe que l'on s'attend d'avoir les résultats les plus forts concernant les liens entre géométrie et topologie.

Dans cette note, nous allons examiner les relations entre croissance et topologie à l'infini de ces variétés, et nous verrons que, lorsque la géométrie et sa complexité sont simples, la topologie des bouts, elle aussi, résulte plutôt simple.

Cette ligne de recherche a été explorée par le premier auteur (R.G.) d'abord dans [19], à la suite des discussions sur la topologie à l'infini eues avec le second auteur (V.P.), et successivement, aussi en collaboration avec L. Funar et P. Pansu, dans [13, 14, 20, 21].

Pour une meilleure compréhension des résultats, qui concernent la topologie asymptotique des variétés, nous donnerons un aperçu des conditions à l'infini dites "gentilles", et des résultats obtenus, dans ce cadre, par le second auteur (V.P.) en théorie géométrique des groupes.

2 Topologie à l'infini

Dans ce qui suit, on va passer en revue quelques conditions de nature topologique qu'on peut imposer aux espaces (en principe non compacts, mais pas nécessairement) ou aux groupes (toujours de présentation finie, dans ce travail), et qui jouent un rôle important en topologie (différentielle) et en théorie des groupes (comme on va l'expliquer). Souvent, mais pas toujours, il s'agira d'invariants asymptotiques, reflétant les propriétés de nature topologique concernant les compléments de compacts arbitrairement larges (d'où la terminologie *à l'infini*).

2.1 Simple connexité à l'infini

Le plus ancien des invariants asymptotiques est probablement l'*espace des bouts* (*ends*), un compact totalement discontinu associé à un espace localement compact quelconque. Par définition, l'ensemble des bouts $B(X)$ d'un espace topologique X localement compact, connexe et localement connexe, est la limite projective de l'ensemble des composantes connexes du complémentaire des compacts de X :

$B(X) = \lim\limits_{\leftarrow} \pi_0(X - K_i)$, avec $K_i \in \{K_i\}$, exhaustion de compacts de X.

L'ensemble $\hat{X} = X \cup B(X)$ peut être muni d'une topologie (naturelle) pour laquelle $\hat{X}$ est compact et connexe, et telle que la topologie induite sur X est la topologie d'origine de X, et celle sur $B(X)$ est la même que celle naturelle d'espace compact totalement discontinu, qu'il possède en tant que limite projective. Cette construction, due à Freudenthal et à Hopf, date du début des années trente.

Les deux résultats suivants, de la même époque, dûs eux aussi à Hopf, sont probablement le début de la Théorie Géométrique des Groupes :

Théorème 1 (Hopf, [41]). *Si K est un complexe simplicial fini, alors l'ensemble des bouts du revêtement universel $\widetilde{K}$ ne dépend que du $\pi_1(K)$.*

On peut définir ainsi l'ensemble des bouts d'un groupe Γ quelconque. On notera par $e(\Gamma)$ la cardinalité de l'espace des bouts de Γ.

Théorème 2 (Hopf, [41]). *Pour un groupe Γ, le $e(\Gamma)$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 ou ∞ (correspondant à un Cantor de bouts pour Γ).* [Bien entendu, pour un espace X quelconque, toutes les valeurs $e(X) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sont possibles].

D'une manière plus concrète, les bouts correspondent aux différentes voies possibles pour "aller à l'infini" d'un espace topologique. Ainsi, un espace localement compact X est dit *connexe* *à l'infini* (ou *à un bout*) si, pour tout compact connexe C de X il existe un compact D, avec $C \subset D \subset X$, et tel que pour tout $x, y \in X - D$ il existe un chemin dans $X - C$ joignant x à y.

Pour les espaces à un seul bout, la meilleure condition topologique à l'infini qu'on peut encore imposer, est la *simple connexité à l'infini* (abrégé s.c.i.), qui traduit, en termes mathématiques, l'idée qu'un lacet "à l'infini" borde un disque "proche" de l'infini, et qui étend, dans un certain sens, la simple connexité des espaces compacts. Plus précisément :

Définition 1. *Un espace topologique simplement connexe et à un seul bout X est dit* simplement connexe à l'infini *si tout compact $K \subset X$ est contenu dans un compact $L \subset X$ tel que tout lacet dans $X - L$ est homotopiquement trivial dans $X - K$.* [On écrira, ainsi, $\pi_1^\infty X = 0$ pour X étant s.c.i.].

Typiquement, pour la variété Wh^3 de Whitehead, $\pi_1^\infty X \neq 0$. Pour illustrer l'importance de la simple connexité à l'infini, on cite le fait suivant :

Affirmation 1. *En dimension $n \geq 3$, la simple connexité à l'infini caractérise les espaces Euclidiens parmi les variétés ouvertes contractiles.*

Il s'agit ici d'un résultat (ou d'une collection de résultats) tellement important(s), qu'on va détailler plus. Signalons, pour commencer, qu'il s'agit (dans le présent contexte), de trois mondes différents, suivant que les dimensions sont $n \geq 5$, $n = 4$ ou $n = 3$, ainsi que de deux catégories possibles, Diff et Top.

Pour $n = 3$, il n'y a aucune différence entre les deux, tandis que pour $n \geq 5$ la différence entre Diff et Top est très bien comprise en termes d'invariants topologiques discrets (classes caractéristiques ; on pourrait dire, aussi, de nombres quantiques discrets). Entre Diff et Top il y a, aussi, la catégorie PL, le linéaire-par-morceaux, dont on ne parlera pas ici. On a, maintenant, le très important :

Théorème 3 (Stallings [55] ; Freedman [11] ; Perelman [38, 39, 40]).

1. *En dimension $n \geq 5$, toute variété différentielle ouverte, contractile et s.c.i. est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.* [Ceci est du à J. Stallings [55]. Une fois qu'on admet ceci, les techniques de la topologie topologique permettent de prouver la même chose en catégorie Top (L. Siebenmann [52])].
2. *En dimension $n = 4$, le même résultat est valable en catégorie* Top. [Ceci est du à M. Freedman [11]].
3. *Enfin en dimension $n = 3$, dans toutes les catégories, le résultat est valable encore.* [Modulo l'hypothèse de Poincaré, ceci est un vieux théorème relativement facile du à R. Edwards [10]. Pour le résultat général, la Conjecture de Poincaré en dimension 3, prouvée par G. Perelman [38, 39, 40], est nécessaire (voir aussi [2] et [28])].

On remarquera ici deux choses. Pour commencer, dans chacun des trois cas $n \geq 5$, $n = 4$ et $n = 3$, le Théorème 3 est fortement lié à la Conjecture de Poincaré respective. Ensuite, pour $n = 4$, l'analogue Diff de ce théorème est violemment faux : il existe une infinité non-dénombrable de variétés différentiables homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, toutes distinctes. Ce résultat est la conséquence de la mise ensemble du gros travail Top de Freedman [11], avec des très profonds résultats sur les espaces de modules des équations de Yang-Mills (S. Donaldson [9]) ou de Seiberg-Witten (N. Seiberg - E. Witten [59]).

C'est la théorie quantique des champs qui vient ici à la rescousse des mathématiques, là où les invariants de la topologie algébrique se sont avérés impuissants.

Il y a ici un gouffre béant et très mystérieux, entre DIFF et TOP, exactement en dimension quatre, un des problèmes majeurs des mathématiques d'aujourd'hui.

2.2 Simple connexité géométrique et ses généralisations

Dans les année soixante-dix, dans le sillage des conjectures de S.P. Novikov, la croyance générale était que, pour une variété fermée M^n asphérique ($\widetilde{M}^n$ contractile), le revêtement universel $\widetilde{M}^n$ était $\mathbb{R}^n$, ou au moins avec $\pi_1^\infty \widetilde{M}^n = 0$. Puis, au début des années 80, M. Davis [8] montre que les deux choses sont fausses, en toute dimension $n \geq 4$, laissant ouverte seulement la question si pour un M^3 asphérique $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$. Un bref aperçu de l'historique de cette question et de sa résolution sera présenté dans les paragraphes qui suivent.

Pour commencer, l'affirmation $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$ équivaut à la suivante :

Affirmation 2. *Si M^3 est fermée et irréductible (c'est-à-dire que tout $S^2 \subset M^3$ borde un $B^3 \subset M^3$), alors $\widetilde{M}^3 = \mathbb{R}^3$.*

Il faut bien noter que l'Affirmation 2, telle quelle, est indépendante de l'hypothèse de Poincaré (en dimension trois).

Or, exactement pour les 3-variétés, il se trouve qu'être s.c.i. est équivalent à l'existence d'une exhaustion (filtration) par des sous-variétés compactes et simplement connexes, l'une contenue dans la suivante (encore une fois, cette équivalence étant vraie seulement en dimension 3). Cette dernière condition de filtration, fortement liée à la simple connexité à l'infini lorsque la dimension est basse, s'appelle *simple connexité géométrique faible* (abrégé WGSC), dont voici la définition :

Définition 2. *Un polyèdre (variété ou complexe simplicial) P est dit* WGSC *si il admet une exhaustion par des compacts simplement connexes, i.e. si $P = \cup_i K_i$ avec K_i sous-polyèdres compacts et simplement connexes, tels que $K_i \subset K_{i+1}$.*

Ainsi, pour une 3-variété M^3, "$\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$" équivaut à "$\widetilde{M}^3$ est WGSC". Derrière WGSC il y a une autre notion plus importante, la *simple connexité géométrique* (GSC), dont le rôle central est apparu en commençant avec les travaux de S. Smale sur l'hypothèse de Poincaré en dim ≥ 5 et le Théorème de h-cobordisme en dim ≥ 6 ([53, 54]).

Grosso modo, une variété M^n compacte est GSC si elle possède une fonction de Morse (ou une décomposition en anses) où les anses (points critiques) d'indice un sont en position de cancellation avec les anses d'indice deux, cas dans lequel (dans la situation compacte) on peut les éliminer. MAIS, la notion s'étend aux M^n non compactes, où la définition procède avec beaucoup plus de circonspection, et aussi pour les complexes cellulaires. Et c'est justement la GSC pour des complexes cellulaires non compacts qui va intervenir en théorie des groupes.

On a, bien entendu, les implications suivantes : GSC $\Longrightarrow$ WGSC $\Longrightarrow$ "$\pi_1 = 0$", et, justement, l'un des ingrédients majeurs de la preuve de Smale est la flèche "$\pi_1 = 0$" $\Longrightarrow$ GSC pour les M^n différentielles compactes, avec $n \geq 5$.

Un petit article du second auteur (V.P.) avec C. Tanasi [50] discute en détail ces questions. On y trouve aussi la preuve du fait folklorique que "*Toute variété différentielle ouverte et* *simplement connexe M^n, avec $\pi_1^\infty M^n = 0$ et $n \geq 5$, est* GSC". (Pour mieux comprendre l'intérêt de la simple connexité géométrique, on renvoie aussi à l'article de synthèse [36]).

Malgré l'équivalence des propriétés GSC et WGSC pour les variétés ouvertes de dimension au moins 5 ([12]), et quoique dans la catégorie DIFF, en grande dimension et dans le cas compact, la WGSC et la GSC soient aussi équivalentes, la GSC est quand même une notion beaucoup plus forte que WGSC. Comme on l'a déjà dit, les deux notions ont un sens aussi pour les complexes cellulaires (de dimension ≥ 2, même compacts, où WGSC veut simplement dire "$\pi_1 = 0$"), MAIS, tandis que la WGSC est liée à la contractibilité, notion homotopique, la GSC est liée à la *collapsibilité*, notion géométrique beaucoup plus fine.

Pour revenir à la question $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$, dans les années '80, le second auteur (V.P.) et A. Casson [18], indépendamment l'un de l'autre, ont beaucoup étudié cette question. Et ce qu'ils ont montré, essentiellement, est que si le $\pi_1 M^3$ vérifie l'une des conditions gentilles d'une longue liste qui comprend les groupes hyperboliques de Gromov, les groupes presque-convexes, les groupes ayants un *Lipschitz combing* (de Thurston), les groupes automatiques, e.a.d.s., alors $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$.

On verra, plus loin, ce qui survit encore dans ces travaux anciens, aujourd'hui. Le fait est qu'en 2003, tous ces vieux théorèmes ont été dépassés par la preuve de la Conjecture de Géométrisation de Thurston par Grisha Perelman [38, 39, 40]. Ceci n'implique pas seulement la Conjecture de Poincaré en dimension 3, mais aussi le $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$, c'est-à-dire l'Affirmation 2 ci-dessus. [Une autre preuve suit aussi des résultats récents de I. Agol en dimension 3 sur les revêtements finis ayants un premier nombre de Betti positif [1]].

Pour conclure ce panorama sur les conditions gentilles à l'infini, nous voulons aussi signaler qu'il existe une autre notion topologique qui peut, pour les variétés à bord, "remplacer" la simple connexité à l'infini, et, à la fois, "étendre" la simple connexité géométrique pour les espaces non simplement connexes : la *propriété de Tucker* (aussi connue sous le nom de *presque-convexité*). Pour une variété, c'est la condition d'être homéomorphe à une variété compacte à bord, duquel on enlève un sous-ensemble fermé ; tandis que pour une 3-variété M^3 (et $\mathbb{P}^2$-irréductible) c'est équivalent (Théorème de Tucker [58]) à la conditon suivante : pour tout compact $K \subset M^3$, toute composante connexe de $M^3 - K$ a un groupe fondamental finiment engendré. Mais aussi, la propriété de Tucker peut être vue, plus généralement, comme la condition d'admettre une décomposition en anses avec seulement un nombre fini d'anses d'indice 1 (voir [58] ainsi que [16, 27, 32]).

3 Théorie géométrique des groupes

Après avoir défini toutes ces conditions topologiques pour les variétés, nous pouvons nous demander si ces notions ont un sens dans le monde des groupes.

La branche des mathématiques qui étudie les connexions entre les propriétés algébriques des groupes et les propriétés topologiques et géométriques des espaces sur lesquels ils opèrent, est la Théorie Géométrique des Groupes (aussi appelée "géométrie à grande échelle"), beaucoup étudiée depuis les travaux de M. Gromov [25, 26]. Dans ce contexte, les groupes (infinis, discrets et de type fini) sont vus comme des ensembles de symétries sur ces espaces, ou bien comme des objets géométriques eux mêmes, via leur *graphe de Cayley*.

Plus précisément, tout groupe discret supporte une métrique naturelle (la *métrique des mots*), et deux quelconques de ces métriques sont "équivalentes à grande échelle" : c'est-à-dire qu'elles sont *quasi-isométriques* (voir [26]). De même, le revêtement universel d'une variété compacte X est "déterminé", à une quasi-isométrie près, par le groupe fondamental de X (ils sont quasi-isométriques). Ce point de vue sur l'étude des revêtements universels fait partie du programme de Gromov de classification des groupes à quasi-isométries près.

Avant d'aller plus loin, ceci est le moment opportun pour passer en revue quelques unes des choses qui ont survécu des vieux travaux des années '80 du second auteur (V.P.) sur la question du $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3 = 0$.

Dans [42], le premier d'une série d'articles sur ce problème [44, 45, 48, 49], l'ingrédient principal de la preuve repose sur la notion de *exhaustion de Dehn* :

Définition 3. *Une variété W est dite* Dehn-exhaustible *si, pour tout compact $C \subset W$, il existe un polyèdre K compact simplement connexe, une immersion $f : K \to W$ et une inclusion $j : C \to K$, tels que dans le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr] & & K \arrow[dl, "f"] \\ & W & \end{tikzcd} \tag{1}$$

on ait $j(C) \cap M_2(f) = \emptyset$, où $M_2(f) \subset K$ est l'ensemble des points doubles de f ($x \in M_2(f)$ ssi card $\{f^{-1}f(x)\} > 1$).

Cette notion reflète l'idée de "approcher" le revetêment universel par des sous-variétés compactes et simplement connexes, afin de pouvoir, après, construire une bonne exhaustion WGSC. Un résultat typique de cette série d'articles est le suivant (ici on paraphrase et réactualise le théorème principal de [42]) :

Théorème 4 ([42]). *Soit M une variété ouverte et simplement connexe, de dimension quelconque. Si la variété $M \times B^n$ (où B^n est la boule standard de dimension n) est géométriquement simplement connexe, alors M est Dehn-exhaustible, tandis que si M est Dehn-exhaustible et de dimension 3, alors elle est* WGSC*, et donc s.c.i..* [Cette dernière relation entre l'exhaustibilité de Dehn et la WGSC en dimension 3 est une variante moderne du Lemme classique de Dehn].

Ceci dit, nous voulons maintenant énoncer des résultats concernant les propriétés topologiques que nous avons défini jusqu'ici, mais pour les groupes :

1. La simple connexité à l'infini est une propriété bien définie pour les groupes de présentation finie (i.e. si $G = \pi_1 X_1 = \pi_1 X_2$ alors $\tilde{X}_1$ est s.c.i. si et seulement si $\tilde{X}_2$ est s.c.i., voir [17], [30] et [57]) ; de plus elle est invariante par quasi-isométries [3, 15].
2. La propriété de Tucker est, elle aussi, bien définie pour les groupes de présentation finie, et, de plus, elle est équivalente à une propriété combinatoire des groupes : la "*tame 1-combability*" [27].
3. Les propriétés WGSC, GSC et l'exhaustibilité de Dehn, ne peuvent pas (dans un certain sens) être définies intrinsèquement pour les groupes discrets : elles dépendent de la présentation du groupe (voir [16, 33]).

3.1 Filtration topologique et groupes faciles

Au milieu des années '90, S. Brick, M. Mihalik et J. Stallings ([4], [56]) ont découvert, à partir des vieux travaux du second auteur (V.P.) et de Casson déjà mentionnés, une notion qui est "la bonne" généralisation, et de l'exhaustibilité de Dehn et de la s.c.i. : la *filtration quasi-simple* (ou QSF).

Définition 4. *Un complexe simplicial (ou variété) X, non-compact et simplement connexe, est dit* QSF *si pour tout compact $C \subset X$ il existe un complexe simplicial (abstrait) K, compact et simplement connexe, avec une fonction simpliciale $f : K \to X$ et une inclusion $j : C \to K$ tels que dans le diagramme analogue à (1)*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr] & & K \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{2}$$

on trouve encore $j(C) \cap M_2(f) = \emptyset$.

Remarque 1. *On notera que :* GSC $\Longrightarrow$ WGSC $\Longrightarrow$ QSF.

Ceci dit, on a aussi :

Théorème 5 (Brick-Mihalik [4]). *Soient K_1, K_2 deux complexes simpliciaux finis tels que $\pi_1 K_1 = \pi_1 K_2$. Alors $\widetilde{K}_1$ est* QSF *si et seulement si $\widetilde{K}_2$ est* QSF.

Ainsi, pour un groupe Γ quelconque (de présentation finie), "Γ est QSF" a un sens, indépendamment de la présentation. Ceci n'est pas le cas pour l'exhaustibilité de Dehn, la GSC ou la WGSC. On reprendra ces choses un peu plus loin (voir, en particulier, le Théorème 6 ci-dessous).

Si on se donne la peine, des vieux travaux du second auteur (V.P.) et de Casson, on pourrait extraire une preuve que les conditions gentilles qu'ils supposent, impliquent pour un groupe Γ (pas nécessairement $\Gamma = \pi_1 M^3$) qu'il est QSF. De manière plus précise :

1. Tous les groupes "ayants une certaine géométrie" sont QSF. Notamment : les groupes hyperboliques de Gromov, les groupes semi-hyperboliques, les groupes CAT(0), les groupes ayants un seul rélateur, les groupes presque-convexes ou peignables, les groupes Tucker et les groupes s.c.i. sont QSF (voir [4, 16, 27, 37]).
2. Pour les $\Gamma = \pi_1 M^3$ et/ou pour $\widetilde{M}^3$, on a, en fait, une équivalence facile entre s.c.i. et QSF.
3. La preuve de la Conjecture de Géométrisation de Thurston par Perelman [38, 39, 40], implique que pour toute 3-variété fermée $\pi_1 M^3$ est QSF.

Remarque 2. *Avant Perelman, il n'y avait pas d'autre moyen pour prouver le dernier énoncé, ni l'Affirmation 2 ci-dessus (voir, aussi, un peu plus loin).*

Malgré ce que nous avons dit jusqu'ici, il existe quand même une notion de *presque-équivalence* pour les propriétés topologiques des groupes qui dépendent de la présentation, à condition d'en préciser une (voir [16]) : il ne s'agit pas vraiment d'une équivalence entre notions (i.e. si $\mathcal{P}_1$ alors $\mathcal{P}_2$), mais plutôt d'égalité des classes des groupes ayants ces propriétés. Tandis que du point de vue topologique (e.g. pour les variétés) toutes ces notions sont nettement différentes, il se trouve que cela n'est pas le cas dans ce contexte-ci (i.e. pour les groupes) :

Théorème 6 ([16]).

1. *Les propriétés* QSF, GSC, WGSC, *l'exhaustibilité de Dehn, et la propriété de Tucker sont toutes presque-équivalentes pour les groupes.*
2. *La propriété* QSF *est un invariant de quasi-isométries.*
3. *Un groupe* Γ *est* QSF *si et seulement si le revêtement universel* $\widetilde{M}^n$ *de toute variété compacte* M^n *avec* $\pi_1(M^n) = \Gamma$ *et dimension* $n \geq 5$ *est* GSC.

Plus récemment, le second auteur (V.P.) a annoncé le résultat suivant :

Théorème 7 ([47]). *Tout groupe* Γ *de présentation finie est* QSF.

Une première ébauche très schématique de la preuve se trouve dans l'annonce [47]. Il y a ensuite trois papiers assez volumineux avec la preuve complète. Le premier, qui dans une version primitive correspond à l'annonce [46], va paraître bientôt dans Geometriae Dedicata. Les parties deux et trois, finalisées seulement très récemment, sont en cours de frappe à l'IHES. Ce gros travail est, bien entendu, complètement indépendant de la grande percée de Perelman, et, entre autre, il produit une autre démonstration pour l'Affirmation 2.

La notion de base pour la trilogie "$\forall\, \Gamma$ est QSF" est celle de représentation (ou *représentation inverse* d'un groupe Γ). On ne va pas la rappeler ici, mais simplement nous référer à [36] où elle est expliquée en détail.

Avec ceci, on va brièvement passer en revue un travail très récent de D. Otera et du second auteur (V.P.) [34]. Ce travail devrait être une bonne introduction à la trilogie "$\forall\, \Gamma$ est QSF". Mais, contrairement à la trilogie en question, ses méthodes sont élémentaires et non transcendantes.

Définition 5. *On dira que le groupe* Γ *est* facile *s'il possède une représentation 2-dimensionelle localement finie dont l'ensemble des points doubles est un fermé (de l'espace de représentation).*

Théorème 8 ([34]). *Si* Γ *est un groupe facile alors* Γ *est* QSF.

Ceci est le premier jalon d'un projet de recherche en cours. Pour commencer, à la suite de [34, 35], on voudrait montrer l'équivalence entre "facile" (concept qu'il faut, bien entendu, prendre avec un grain de sel) et QSF. Entre parenthèses, ce qu'on peut lire aussi, entre les lignes des vieux travaux du second auteur (V.P.), si on se donne la peine, est la preuve que les groupes hyperboliques ou ayants une autre des géométries gentilles déjà mentionnées, sont faciles.

Avant de pouvoir aller plus loin, signalons deux choses : pour commencer, le Théorème 7 va à l'encontre de la croyance générale qu'un résultat universel, valable pour tout Γ (comme justement le Théorème 7 en question), ne peut être que trivial. Mais, déjà le cas particulier $\Gamma = \pi_1 M^3$ n'étant connu, avant, qu'en invoquant tout le travail plus que hautement non-trivial de Perelman.

D'autre part, le projet de recherche mentionné plus haut devrait aboutir, modulo le Théorème 7, au résultat que : "tout groupe est facile".

Où se cachent-ils alors les objets "difficiles" dans le contexte groupal ?

Il y a ici une idée qui ouvrira, peut-être, un grand chantier de recherche. Il devrait exister une autre catégorie, plus large que celle des groupes de présentation finie et, à l'intérieur de laquelle, les groupes de présentation finie ne seraient que quelque chose comme les nombres rationnels parmi tous les nombres réels. Les objets de cette catégorie seraient apparentés aux pavages apériodiques de Roger Penrose ou aux quasi-cristaux des physiciens ; et la géométrie non-commutative interviendrait dans leur définition correcte. Ceci devrai fournir aussi l'explication du paradoxe apparent qu'il puisse exister, en catégorie des groupes de présentation finie, un résultat à la fois universel et aussi hautement non-trivial.

On arrête ici avec la topologie à l'infini et la théorie géométrique des groupes, et on va passer à la géométrie riemannienne.

4 Topologie des variétés à géométrie bornée

Dorénavant, nous allons nous intéresser à la géométrie et à la topologie des variétés riemanniennes (non-compactes) ayants une géométrie locale assez "simple", pour lesquelles nous allons étudier le comportement topologique à l'infini.

La notion principale qui nous intéresse ici, est celle de *géométrie bornée* :

Définition 6. *Une variété riemannienne* (M, g) *est dite* à géométrie bornée *si la courbure sectionnelle* K*, en module, et le rayon d'injectivité* i*, satisfont les inégalités :*

$$|K| \leq 1 \text{ et } i \geq 1.$$

Remarque 3. *Nous ne parlerons pas de tout ce qui concerne les questions sur le "pincement" de la courbure sectionnelle (pour ceci on renvoie aux travaux de M. Gromov [22, 23, 24]).*

Il existe plusieurs familles intéressantes de variétés à géométrie bornée : la principale étant, encore une fois, la classe des revêtements universels des variétés compactes (un autre exemple est constitué par l'ensemble des feuilles d'un feuilletage). Mais ensuite, la géométrie de ces variétés peut être enrichie encore plus, en imposant, par exemple, des conditions de "contrôle" sur certains invariants : Cheeger et Gromov ont été les premiers à aborder ce type de problématique, et dans [6] et [7], ils se sont intéressés spécifiquement aux variétés à géométrie bornée ayants une *croissance linéaire* du volume.

Avant d'aller plus loin, nous donnons la définition de la (fonction de) croissance (linéaire) des variétés :

Définition 7. *Une variété riemannienne complète* (M, g) *est dite* à croissance linéaire *s'il existe une constante* c *telle que le volume des boules géodésiques* $B(r)$ *de rayon* r*, centrées en un point fixé* x_0*, satisfait l'inégalité :*

$$vol\,(B(r)) \leq cr.$$

Afin d'être plus précis sur le *type de croissance* (linéaire, polynomiale, intermédiaire ou exponentielle), normalement on introduit la relation d'équivalence suivante :

Définition 8. *Les fonctions réelles positives* f *et* g *sont dites* équivalentes*, et on l'écrit* $f \sim g$*, si, pour un choix de constantes positives* C_i, c_i*, sont satisfaites les inégalités :*

$$c_1 f(c_2 x) + c_3 \leq g(x) \leq C_1 f(C_2 x) + C_3.$$

La classe d'équivalence de f *est notée par* $cr(f)$ *et on l'appelle le* type de croissance de f. *On dit que* f *a* croissance polynomiale de degré $d \geq 0$, *s'il existe* $d \geq 0$ *tel que* $cr(f) = cr(t^d)$. *Dans le cas* $d = 1$*, on parle de* croissance linéaire.

Ayant défini le type de croissance d'une fonction, nous pouvons enfin définir précisément le *type de croissance* d'une variété :

Définition 9. *Le* type de croissance *d'une variété riemannienne* (M, g) *est le type de croissance de la fonction volume riemannien* $v_x(r)$ *de la boule fermée* $B_x(r)$ *de centre* x *et de rayon* r *dans* M.

Remarque 4. *La première observation à faire est que, évidemment, la classe d'équivalence de* $v_x(r)$ *ne dépend pas du choix du point* x. [Nous allons donc l'omettre dans la suite].

On peut facilement montrer que :

Proposition 1 ([20]).

1. *Si* (M, g) *est une variété riemannienne compacte et si* A *est une constante suffisamment grande, alors* (M, Ag) *est à géométrie bornée.*
2. *Si* (M, g) *est à géométrie bornée, alors, pour tout* $A > 1$, *la variété* (M, Ag) *est encore à géométrie bornée.*
3. *Si une variété riemannienne* (M, g) *est à géométrie bornée, alors la croissance du volume des boules* $B(r)$ *est au moins linéaire, c'est-à-dire :*

$$vol(B(r)) \geq cr$$

où la constante $c > 0$ *ne dépend que de la dimension de* M *(voir e.g. [19]).*

La question naturelle qu'on peut se poser maintenant est la suivante : quelles sont les variétés qui supportent une métrique à géométrie bornée et à croissance exactement linéaire ?

Afin de répondre à cette question, dans [13], le premier auteur (R.G.) avec L. Funar, ont étudié la topologie de ces variétés, et ils ont prouvé que la donnée de ces restrictions géométriques pose de fortes contraintes topologiques à l'infini. Notamment :

Théorème 9 ([13]). *Si* M *est une variété non compacte admettant une métrique riemannienne à géométrie bornée et à croissance linéaire, alors :*

1. M *est à topologie finie à l'infini.*
2. M *a un nombre fini de bouts.*

Définition 10. *Soit* M *une variété non compacte de dimension* n. *On dit que* M *est* à topologie finie à l'infini *si* M *est la réunion de sous-variétés compactes* W_i *à bord, telles que chaque* ∂W_i *soit la réunion de deux* $(n-1)$ *sous-variétés fermées* $V_{i-1} \cup V_i$, *où toutes les* V_i *soient difféomorphes à une même variété* V, *et telles que les* V_i *soient deux-à-deux disjointes (et* $V_0 = \emptyset$*) (voir [13, 14, 20]).*

Remarque 5. *La preuve du Théorème 9 utilise fortement le Théorème de finitude de Cheeger [5] et le Théorème de Cheeger-Gromov [6]. Le reste repose sur le fait que pour une variété à géométrie bornée, on peut construire une exhaustion dont on est capable de "contrôler" la géométrie (en particulier à l'intérieur des anneaux* $B(r+1) - int\ B(r)$*).*

Au vu du Théorème 9, la première chose qu'on se demande est : dans quel cas l'affirmation réciproque est-elle valable ?

La réponse a été apportée par le résultat suivant, obtenu par le premier auteur (R.G.) dans [20] :

Théorème 10 ([20]). *Si M est une variété différentiable non compacte qui a la topologie finie à l'infini, alors il existe sur M une métrique riemannienne complète g à géométrie bornée et à croissance linéaire.*

La démonstration de ce théorème comporte plusieurs étapes : d'abord, il faut construire une métrique à géométrie bornée sur chaque V_i (composante du bord ∂W_i des sous-variétés W_i de l'exhaustion de la variété M), qu'on peut après étendre pour obtenir une métrique globale à géométrie bornée. Ensuite, pour avoir la croissance linéaire, on peut remplacer chaque V_i par un cylindre $V_i \times I$ (de sorte que le type de difféomorphisme de la variété M ne soit pas changé). Sur ces cylindres, on peut alors considérer des métriques de type *warped product* telles que la longueur de I devienne de plus en plus grande. Et, à la fin, il faut montrer que la croissance ne peut pas être plus que linéaire. Cela va entraîner banalement que la croissance est en fait linéaire.

4.1 Fonctions de remplissage

Pour une variété riemannienne, mis à part la fonction de croissance du volume, il y a bien d'autres fonctions qui en mesurent de façon "géométrique" les propriétés topologiques. Parmi elles, l'une des plus intéressantes est l'*aire de remplissage* (ou *filling area*), qui mesure l'aire minimale nécessaire pour "remplir" tout lacet d'une certaine longueur donnée. Plus précisément :

Définition 11. *La fonction* aire de remplissage *$F_X(l)$ de la variété simplement connexe X est le plus petit nombre avec la propriété que tout lacet de longueur l dans X est le bord d'un disque d'aire $F_X(l)$.*

Remarque 6. *Par abus de langage, nous appelons* aire de remplissage *la classe d'équivalence de la fonction aire de remplissage.*

La fonction de remplissage riemannienne a été introduite par M. Gromov en lien avec la théorie des groupes (vu l'équivalence quasi-isométrique entre le groupe fondamental d'une variété compacte et son revêtement universel).

À vrai dire, l'aire de remplissage a été étudiée d'abord pour les revêtements universels, et, dans ce cas-ci, il se trouve qu'elle est équivalente à la *fonction de Dehn* (d'une présentation) du groupe, fonction qui mesure la "complexité" du groupe (voir [26] et, pour un panorama des résultats plus récents, [29]).

Par exemple, M. Gromov montre que lorsque l'aire de remplissage d'un groupe est sous-quadratique alors elle est linéaire, et donc le groupe en question est hyperbolique au sens de Gromov [25]. D'autre part, l'on sait aujourd'hui que les exposants des aires de remplissages polynomiales des groupes forment un sous-ensemble dense dans $[2, \infty)$.

Tout ceci justifie donc l'intérêt et l'étude des fonctions aire de remplissage des variétés riemanniennes.

Remarque 7. *L'aire de remplissage $F_{\widetilde{X}}$ du revêtement universel $\widetilde{X}$ d'une variété compacte X est indépendante du choix de la métrique choisie sur X.*
En outre, l'aire de remplissage est un invariant de quasi-isométrie et donc un invariant du groupe fondamental de X qu'on peut appeler l'aire de remplissage du groupe *[26].*

Ici, nous allons nous restreindre seulement au cas des variétés à géométrie bornée et croissance linéaire.

Observons d'abord que la définition ci-dessus de l'aire de remplissage n'est pas toujours appropriée pour les variétés riemanniennes non-compactes, vu que même pour des variétés à géométrie bornée elle pourrait être infinie. C'est pour cela que nous introduisons le raffinement suivant :

Définition 12. *Soit X une variété riemannienne non-compacte. La* fonction aire de remplissage *$F_X(l,r)$ est la plus petite aire d'un disque dans X remplissant un lacet de longueur l, pour tout lacet se trouvant dans la boule métrique $B_X(r)$ de rayon r dans X centrée dans un point fixé.*

Définition 13. *Deux fonctions positives $f(l,r)$ et $g(l,r)$ sont dites* équivalentes*, et on l'écrit $f \sim g$, si*

$$c_1(l)f(c_2(l),r) + c_3(l) \leq g(l,r) \leq C_1(l)f(C_2(l),r) + C_3(l),$$

pour certaines fonctions positives croissantes $C_i(l), c_i(l)$.
On appelle croissance de l'aire de remplissage *la classe d'équivalence de la fonction aire de remplissage.*

Remarque 8. *Tout comme l'aire de remplissage, la croissance de l'aire de remplissage est aussi un invariant de quasi-isométrie de X.*

Définition 14. *La croissance de l'aire de remplissage est* sous-linéaire *si, pour tout l, on a :*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{F_X(l,r)}{r} = 0.$$

Remarque 9. *En particulier, si l'aire de remplissage est finie, sa croissance est automatiquement sous-linéaire.*

Nous allons revenir maintenant au premier invariant de topologie asymptotique que nous avons défini au début : la simple connexité à l'infini. Comme nous l'avons déjà dit, il est important d'obtenir des critères géométriques impliquant la simple connexité à l'infini.

Le résultat principal de [14] va justement dans cette direction :

Théorème 11 ([14]). *Une variété riemannienne ouverte simplement connexe, à géométrie bornée, à croissance linéaire du volume et à croissance de l'aire de remplissage sous-linéaire, est simplement connexe à l'infini.*

Corollaire 1. *En toute dimension, une variété riemannienne ouverte, contractile, à géométrie bornée, croissance linéaire du volume et croissance de l'aire de remplissage sous-linéaire est difféomorphe (seulement homéomorphe en dimension 4) à l'espace euclidien.* $\big[$Ceci découle du Théorème 3 (et, encore une fois, en dimension 3 il faut supposer l'irréductibilité et utiliser la Conjecture de Poincaré établie par Perelman)$\big]$.

Corollaire 2. *Si une variété riemannienne est de dimension au moins 5 et satisfait les hypothèses du Théorème 11, alors elle est aussi* GSC. $\big[$Ceci grâce aux résultats de [50]$\big]$.

Observons aussi qu'il existe un raffinement encore plus fin de l'aire de remplissage, comme suit. Dénotons $F_X(l,r;\lambda)$ pour la plus petite aire d'un disque dans X remplissant un lacet de longueur l se trouvant dans le cylindre métrique $B_X(r) - B_X(\lambda r)$ dans X, lorsque les boules $B_X(r)$ et $B_X(\lambda r)$ sont centrées dans un même point fixé. Dans ce cas de figure, la fonction $F_X(l,r;\lambda)$ n'est plus forcément croissante. Alors :

Définition 15. *On dira que la croissance de l'aire de remplissage est* faiblement sous-linéaire *lorsque :*

$$\lim_{r\to\infty}\inf \frac{f_X(l,r;\lambda)}{r} = 0, \ \textit{pour tout } 0 < \lambda \leq 1.$$

Il est important de souligner que la croissance de cette nouvelle fonction $F_X(l,r;\lambda)$ n'est plus un invariant de quasi-isométrie (parce que le module du cylindre peut être changé par une quasi-isométrie). Néanmoins, la propriété d'avoir une croissance de l'aire de remplissage faiblement sous-linéaire est un invariant de quasi-isométrie (pour des techniques de preuve similaires, voir par exemple [26] ou [15]).

La preuve du Théorème 11 est un peu technique, l'idée de fond étant quand même simple : obtenir des ultérieurs "contrôles géométriques" (e.g. métriques) du Théorème (de finitude) 9.

En outre, par ces mêmes méthodes, il n'est pas difficile d'aller un peu plus loin du Théorème 11 : il est possible, en fait, de montrer qu'une variété riemannienne ouverte, simplement connexe, à géométrie bornée, croissance linéaire du volume et croissance de l'aire de remplissage faiblement sous-linéaire, est aussi simplement connexe à l'infini.

Remarque 10. *En revanche, les métriques à géométrie bornée sur les variétés ouvertes et s.c.i. n'ont pas nécessairement une aire de remplissage sous-linéaire (voir [14], où les auteurs construisent un exemple explicite sur* $\mathbb{R}^n,\ n \geq 3$*).*

4.2 Remarques finales

Jusqu'ici nous avons parlé seulement de topologie à l'infini des variétés à géométrie bornée ayants une croissance linéaire du volume. Mais, bien sûr, on pourrait aussi se demander, s'il existe d'autres types de croissance possibles pour ce genre de variétés.

Avec cette idée, le premier auteur (R.G.) avec P. Pansu, ont étudié la question dans [21], en trouvant d'autres corrélations entre les types de croissance des variétés à géométrie bornée et leur topologie a l'infini.

Malheureusement, ils n'ont pas réussi à donner une caractérisation complète de tous les types de croissance possibles de telles variétés ; leur résultat principal étant le suivant :

Théorème 12 ([21]). *Soit M une variété connexe, et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle qu'il existe une constante $L > 0$ pour laquelle :*

$$\frac{1}{L} \leq f(n+2) - f(n+1) \leq L\big(f(n+1) - f(n)\big)$$

(une telle fonction est dite à croissance bornée de la dérivée*). Alors :*

1. *Si M est à topologie fini à l'infini, alors f appartient au type de croissance d'une variété riemannienne à géométrie bornée difféomorphe à M.*
2. *Lorsque M n'a pas la topologie finie à l'infini, alors f appartient au type de croissance d'une variété riemannienne à géométrie bornée difféomorphe à M si et seulement si $\frac{f(n)}{n}$ tend vers $+\infty$.*

Évidemment, afin de pouvoir compléter la caractérisation de tous les types de croissance des variétés à géométrie bornée, il manque un critère permettant de savoir quand (la classe d'équivalence d') un type de croissance contient une fonction à croissance bornée de la dérivée. Cela reste, pour le moment, un problème ouvert.

Références

[1] I. Agol, D. Groves, J. Manning, *The virtual Haken conjecture*, ArXiv : math/1204.2810 [math.DG] (2012).

[2] G. Besson, *Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d'après G. Perel'man)*. Séminaire Bourbaki. Volume 2004/2005. Exposés 938–951. Paris : Société Mathématique de France. Astérisque 307, 309–347, Exp. No. 947 (2006). ISBN 978-2-85629-224-2/pbk

[3] S.G. Brick, Quasi-isometries and ends of groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **86** (1993), 23–33.

[4] S.G. Brick, M.L. Mihalik, The QSF property for groups and spaces, *Math. Zeit.*, **220** (1995), 207–217.

[5] J. Cheeger, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 61–75.

[6] J. Cheeger, M. Gromov, *On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Differential geometry and complex analysis, 115–154, H.E.Rauch Memorial volume, (I. Chavel and H. M. Farkas Ed.), Springer, Berlin, 1985.

[7] J. Cheeger, M. Gromov, *Chopping Riemannian manifolds*, in Differential geometry, A Symposium in Honor of Manfredo do Carmo, (H. Blaine Lawson, Jr. and Keti Tenenblat, Editors), 85–94, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[8] M.W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidian Spaces, *Ann. Math.*, **117** (1983), 293–324.

[9] S.K. Donaldson, An application of gauge theory to four-dimensional topology, *Jour. Diff. Geom.*, **18** (1983), 279–315.

[10] C.H. Edwards, Open 3-manifolds which are simply connected at infinity, *Proc. A.M.S.*, **14** (1963), 391–395.

[11] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *Jour. Diff. Geom.*, **17** (1982), 357–453.

[12] L. Funar, S. Gadgil, On the geometric simple connectivity of open manifolds, *I.M.R.N.*, **24** (2004), 1193–1248.

[13] L. Funar, R. Grimaldi, La topologie à l'infini des variétés à géométrie bornée et à croissance linéaire, *J. Math. Pures Appl.*, **76** (1997), 851–858.

[14] L. Funar, R. Grimaldi, The ends of manifolds with bounded geometry, linear growth and finite filling area, *Geom. Ded.*, **104** (2004), 139–148.

[15] L. Funar, D.E. Otera, A refinement of the simple connectivity at infinity of groups, *Arch. Math. (Basel)*, **81** (2003), 360–368.

[16] L. Funar, D.E. Otera, On the WGSC and QSF tameness conditions for finitely presented groups, *Groups, Geometry and Dynamics*, **4** (2010), 549–596.

[17] R. Geoghegan, M.L. Mihalik, The fundamental group at infinity, *Topology*, **35** (1996), 655–669.

[18] S. Gersten, J.R. Stallings, Casson's idea about 3-manifolds whose universal cover is $\mathbb{R}^3$, *Inter. J. Alg. Comput.*, **1** (1991), 395–406.

[19] R. Grimaldi, Sur la croissance des variétés riemanniennes, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, **3** (1995), 47–54.

[20] R. Grimaldi, Croissance linéaire et géométrie bornée, *Geom. Ded.*, **79** (2000), 229–238.

[21] R. Grimaldi, P. Pansu, Bounded geometry, growth and topology, *J. Math. Pures Appl.*, (9) **95** (2011), n.1, 85–98.

[22] M. Gromov, Manifolds of negative curvature, *Jour. Diff. Geom.*, **13** (1978), 223–230.

[23] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic Nathan, Paris 1981.

[24] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **56** (1982), 5–100.

[25] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essay in Group Theory (S. Gersten ed.), MSRI publications, **8**, Springer-Verlag 1987.

[26] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[27] M.L. Mihalik, S.T. Tschantz, Tame combings of groups, *Trans. A.M.S.*, **349** (1997), 4251–4264.

[28] J. Morgan, G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Monographs 3. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) ; Cambridge, MA : Clay Mathematics Institute. xlii + 521 pp., 2007. ISBN 978-0-8218-4328-4/hbk

[29] A.Yu. Olshanskii, M.V. Sapir, Length and area functions on groups and quasi-isometric Higman embeddings, *Inter. J. Alg. Comput.*, **11** (2001), n. 2, 137–170.

[30] D.E. Otera, On the simple connectivity of groups, *Boll. U.M.I.*, (8) **6**-B (2003), 739–748.

[31] D.E. Otera, Topologia asintotica dei gruppi : connessione all'infinito e semplice connessione geometrica, *Boll. U.M.I. (La Matematica nella Società e nella Cultura)*, Serie VIII, Vol. **X-A** (2007), Fascicolo Tesi di Dottorato, 303-306.

[32] D.E. Otera, On the proper homotopy invariance of the Tucker property, *Acta Math. Sin., Eng. Ser.*, (3) **23** (2007), 571–576.

[33] D.E. Otera, *A topological property for groups*, Contemporary geometry and topology and related topics, 227–236. Proceedings of the 8th International Workshop on Differential Geometry and its Applications, Cluj-Napoca, Romania, August 19–25, 2005. Cluj University Press, 2008.

[34] D.E. Otera, V. Poénaru, "Easy" Representations and the qsf property for groups, *Bull. of the Belgian Math. Soc. - Simon Stevin*, **19** (2012), n.3, 385–398.

[35] D.E. Otera, V. Poénaru, Tame combings and easy groups, Preprint 2013 (submitted).

[36] D.E. Otera, V. Poénaru, C. Tanasi, On Geometric Simple Connectivity, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. Nouvelle Série*, Tome 53 (**101**) (2010), n.2, 157–176.

[37] D.E. Otera, F. Russo, On the wgsc property in some classes of groups, *Medit. J. Math.*, **6** (2009), 501–508.

[38] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv : math/0211.159 [math.DG] (2002).

[39] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, ArXiv : math/0303.109 [math.DG] (2003).

[40] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions of the Ricci flow on certain three-manifolds*, ArXiv : math/0307.245 [math.DG] (2003).

[41] V. Poénaru, *Groupes discrets*. Lecture Notes in Mathematics, **421**. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1974.

[42] V. Poénaru, Killing handles of index one stably and π_1^∞, *Duke Math. J.*, **63** (1991), n.2, 431–447.

[43] V. Poénaru, The collapsible pseudo-spine representation theorem, *Topology*, **31** (1992), n.3, 625–636.

[44] V. Poénaru, Almost convex groups, Lipschitz combing, and π_1^∞ for universal covering spaces of closed 3-manifolds, *Jour. Diff. Geom.*, **35** (1992), 103–130.

[45] V. Poénaru, Geometry "à la Gromov" for the fundamental group of a closed 3-manifold M^3 and the simple connectivity at infinity of $\widetilde{M}^3$, *Topology*, **33** (1994), n.1, 181–196.

[46] V. Poénaru, Equivariant, locally finite inverse representations with uniformily bounded zipping length, for arbitrary finitely presented groups, ArXiv : 0907.1738 [math.GR]. *Geometriae Dedicata*, (in press).

[47] V. Poénaru, Discrete symmetry with compact fundamental domain and Geometric simple connectivity, Preprint Univ. Paris-Sud Orsay 2007-16 (2007). ArXiv : 0711.3579 [math.GR] (2007).

[48] V. Poénaru, C. Tanasi, Hausdorff Combing of Groups and π_1^∞ for Universal Covering Spaces of closed 3-manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., Serie IV* **20** (1993), n.3, 387–414.

[49] V. Poénaru, C. Tanasi, k-weakly almost convex groups and $\pi_1^\infty \widetilde{M}^3$, *Geom. Ded.*, **48** (1993), 57–81.

[50] V. Poénaru, C. Tanasi, Some remarks of geometric simple connectivity, *Acta Math. Hungarica*, **81** (1998), 1–12.

[51] V. Poénaru, C. Tanasi, Equivariant, Almost-Arborescent representations of open simply-connected 3-manifolds ; A finiteness result, *Memoirs of the A.M.S.*, **800** (2004), 88 pp.

[52] L.C. Siebenmann, On detecting Euclidean space homotopically among topological manifolds, *Invent. Math.*, **6** (1968), 263–268.

[53] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.*, **74** (1961), n.2, 391–406.

[54] S. Smale, On the structure of manifolds, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 387-399.

[55] J.R. Stallings, The piecewise linear structure of the Euclidean space, *Proc. of the Cambridge Math. Phil. Soc.*, **58** (1962), 481–488.

[56] J.R. Stallings, *Brick's quasi-simple filtrations for groups and* 3*-manifolds*, Geom. Group Theory **1**, London Math. Society, 188–203 (1993).

[57] C. Tanasi, Groups simply connected at infinity, (Italian), *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, **31** (1999), 61–78.

[58] T.W. Tucker, Non-compact 3-manifolds and the missing boundary problem, *Topology*, **73** (1974), 267–273.

[59] E. Witten, Monopoles and four-manifolds, *Math. Res. Letters*, **1** (1994), 769–796.

Reçu : 20.02.2013

Revu et corrigé : 13.03.2013

Accepté : 26.03.2013

D.E.I.M., Università degli Studi di Palermo
viale delle Scienze, Ed. 9, 90128, Palermo, Italia
E-mail : `renata.grimaldi@unipa.it`

Département de Mathématiques
Université Paris-Sud 11
Bât. 425, 91405 Orsay, France
E-mail : `valpoe@hotmail.com`