Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 55(103) No. 3, 2012, 295–310

Presque périodicité avec poids

by
Gilbert Muraz and Serap Öztop*

Abstract

This work is concerned with the study of the almost periodicity in the spaces where the "shift operator" is not an isometry. The frame of the abstract G-modules and $L^1_\omega(G)$-modules is the suitable one, for a weight ω compatible with the norm of the "shift operator". The notion of almost periodic elements with weight is natural in this spaces. The spaces $L^p_\omega(G)$ and $L^p_{\frac{1}{\omega}}(G)$ are considered.

Résumé

Le but de ce travail est l'étude de la presque périodicité dans les espaces où la "translation" n'est pas une isométrie. Le cadre abstrait des G-modules et $L^1_\omega(G)$-modules est bien adapté, pour un poids ω compatible avec la norme de l'opérateur "translation". La notion d'éléments presque périodiques à poids est naturelle dans ces espaces. Leur étude pour les espaces $L^p_\omega(G)$ et $L^p_{\frac{1}{\omega}}(G)$ est traitée.

Key Words : Weight function, Banach module, almost periodicity, multiplier.
2010 Mathematics Subject Classification : Primary 43A20 ; Secondary 43A22, 43A60.

1 Introduction

Dans l'étude classique des fonctions presque périodiques, la translation est une isométrie [1], [2], [6], [12] pour les normes considérées. En général, une action d'un groupe localement compact (abélien) G sur un espace de Banach E par application linéaire, c'est-à-dire un morphisme $x \mapsto L_x$ de G dans le groupe des opérateurs inversibles, ne peut s'étendre à $L^1(G)$ mais à l'espace $L^1_\ell(G) = \{f,\ f(x)\ell(x) \in L^1(G)\}$ où $\ell_x = \|L_x\|$ et si par exemple l'application $x \mapsto \ell_x$ est continue.

Dans ce travail, L_x ne sera pas nécessairement une isométrie, et le cadre général considéré pour l'étude de la presque périodicité est celui des G_ω-modules et $L^1_\omega(G)$-modules où ω est une fonction poids. Leurs définitions et propriétés fondamentales sont l'objet de la première partie.

*This work was supported by Research Fund of the Istanbul University. Project number : UDP-791/23062006

Après l'étude générale de la ω-presque périodicité, le cas des espaces $L^1_\omega(G)$ est traité. Comme dans le cas classique, seul l'élément nul dans $L^p_\omega(G)$, $1 \leq p < +\infty$, est ω-presque périodique si le poids ω vérifie $\overline{\lim}_{x\to\infty}\omega(x) = +\infty$, G non compact.

Par contre pour les espaces $L^\infty_\omega(G)$ et $L^p_{\frac{1}{\omega}}(G)$, $1 \leq p \leq +\infty$, la situation est bien différente.

Dans une dernière partie des notions de ω-presque périodicité plus faible sont considérées à l'image de G. Crombez et W. Gowaerts ([4], [7]).

2 Notations et propriétés fondamentales

Dans ce travail G est un groupe localement compact abélien, non compact et $L^p(G)$, $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace classique des classes de fonctions associé à la mesure de Haar dx de G.

Une fonction ω définie sur G, positive, mesurable, localement bornée est appelée poids sur G si elle vérifie :

$$1 \leq \omega(x), \quad \forall x \in G$$
$$\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y), \quad \forall x, y \in G.$$

2.1 Espace $L^p_\varphi(G)$

Soit φ une fonction positive mesurable définie sur G ; les espaces $L^p_\varphi(G)$ des classes de fonctions f telles que $f\varphi \in L^p(G)$ munis des normes naturelles $\|f\|_{p,\varphi} = \|f\varphi\|_p$ sont des espaces de Banach admettant $L^{p'}_{\varphi^{-1}}(G)$ comme espaces duaux avec $\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p < +\infty$.

D'après la proposition 1 de Spector [17], φ peut être supposée continue sans restreindre la généralité.

Si φ est localement bornée, (φ continue par exemple) les fonctions bornées à support compact ou encore les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p_\varphi(G)$, $1 \leq p < +\infty$. Une étude plus complète de ces espaces peut être consultée dans [9], [10], [15], [17].

Si φ est un poids ω, $L^p_\omega(G)$ est contenu dans $L^p(G)$ et la translation $(L_x f)(y) = f(y-x)$ est un opérateur sur $L^p_\omega(G)$ avec $\|L_x\| \leq \omega(-x)$.

Pour $p = 1$, $L^1_\omega(G)$ est une algèbre de Banach pour la convolution. Par la suite, ω désignera un poids symétrique sur G, *i.e.* avec $\omega(-x) = \omega(x)$, et continue [17].

2.2 G_ω-module

Un espace de Banach E est appelé G-module s'il existe un morphisme du groupe L de G dans le groupe des opérateurs inversibles (bornées) de E, *i.e.* :

$$L_0 = \text{Identité}$$
$$L_{x+y} = L_x \circ L_y, \quad x, y \in G.$$

Si de plus, $\|L_x\| \leq \omega(x)$ pour $x \in G$ où ω est un poids sur G, E est dit G_ω-module. Tout G module est un G_ω-module ; il suffit de prendre pour poids $\omega(x) = \text{Max}(1, \|L_x\|)$ ou encore $\omega(x) = \text{Max}(\|L_{-x}\|, \|L_x\|)$.

Les espaces $L^p_\omega(G)$ sont des G_ω-modules $\big(\|L_x\| \leq \omega(x)\big)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Pour un G_ω-module E les sous-espaces de Banach suivants :

$$\begin{aligned}
E_b &= \{e \in E \mid \sup\{\|L_x\, e\|, x \in G\} < \infty\} \\
E_c &= \{e \in E \mid x \mapsto L_x\, e \text{ est continue } \forall x \in G\} \\
E_{uc} &= \{e \in E \mid x \mapsto L_x\, e \text{ est uniformément continue, } \forall x \in G\} \\
E_{cb} &= E_c \cap E_b \\
E_{ucb} &= E_{uc} \cap E_b
\end{aligned}$$

sont des sous-G_ω-modules de E.

Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p_\omega(G) = L^p_\omega(G)_c$.

En effet, comme $L^p_\omega(G)_c$ est fermé par densité, il suffit de montrer que toute fonction continue à support compact appartient à $L^p_\omega(G)_c$.

Soit f continue à support compact K et V un voisinage symétrique compact de 0 dans G ; f et $L_a f$ sont à support dans $K+V$ pour tout $a \in V$ et f est uniformément continue sur $K+V$ ce qui implique que :

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \in V}} \|f - f_a\|_\infty = 0 = \lim_{a \to 0} \|f - L_a f\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
\|f - L_a\, f\|_{L^p_\omega(G)} &= \left(\int |f(x) - f(x-a)|^p\, \omega^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad a \in V \\
&= \left(\int_{x+K+V} |f(x) - f(x-a)|^p\, \omega^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad a \in V \\
&\leq \|f - L_a\, f\|_\infty \sup\{\omega(x), x \in K+V\} \int_{K+V} dx, \quad a \in V
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{a \in V \\ a \to 0}} \|f - L_a\, f\|_{L^p_\omega(G)} \leq \lim_{a \to 0} \|f - L_a\, f\|_\infty = 0.$$

2.3 $L^1_\omega(G)$-module

Un espace de Banach E est appelé $L^1_\omega(G)$-module s'il existe un morphisme T de l'algèbre de Banach $L^1_\omega(G)$ dans l'algèbre $L(E,E)$ des opérateurs bornés dans E avec :

$$\begin{gathered}
\|T_f\|_{L(E,E)} \leq \|f\|_{L^1_\omega(G)} \\
T_{f*g} = T_f o T_g
\end{gathered}$$

où $f * g$ est le produit de convolution dans $L^1_\omega(G)$. Par extension pour $e \in E, T_f(e)$ est noté $f * e = T_f(e)$.

Pour $\omega = 1$, une étude complète est donnée dans [6] et ce qui suit en est fortement inspiré.

La partie dégénérée de E est notée $E_{\deg} = \{e \in E|\ f * e = 0,\ \forall f \in L^1_\omega(G)\}$; c'est un sous-$L^1_\omega(G)$-module et E est un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre (ou non dégénéré) si $E_{\deg} = \{0\}$.

Pour un $L^1_\omega(G)$-module, le sous-$L^1_\omega(G)$-module :

$$\begin{aligned} E_{\text{ess}} &= \{f * e | f \in L^1_\omega(G), e \in G\} \\ &= \{e | e = \lim_\alpha \mu_\alpha * e\} \end{aligned}$$

où $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ est une unité approchée bornée (u.a.b.) de $L^1_\omega(G)$, est appelée partie essentielle de E.

L'existence d'une u.a.b. $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ est assurée dans $L^1_\omega(G)$ avec $\|\mu_\alpha\|_{L^1_\omega(G)} \leq 1$, par exemple par le lemme 3 [10].

E_{ess} est un sous-espace de Banach de E et l'équivalence précédente est obtenue par le théorème de factorisation de Cohen [11]. E_{ess} est sans ordre et E est dit essentiel si $E = E_{\text{ess}}$.

Remarque 2.3.1. La partie essentielle E_{ess} d'un $L^1_\omega(G)$-module est aussi un G_ω-module pour la G-action L définie par

$$L_x e = \lim_\alpha (\mu_\alpha)_x * e = \varphi_x * e_1$$

si $e = \varphi * e_1,\ \varphi \in L^1_\omega(G), e_1 \in E$ et $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ une u.a.b.

De plus L vérifie

$$\begin{aligned} &\|L_x(e)\| \leq \omega(-x)\|e\| \\ &L_x(\varphi * e) = \varphi_x * e = \varphi * L_x(e). \end{aligned}$$

La translation étant continue dans $L^1_\omega(G)$, si $e = \varphi * e_1, \varphi \in L^1_\omega(G), e_1 \in E$, l'inégalité

$$\|L_x e - e\| = \|\varphi_x * e_1 - \varphi * e_1\| \leq \|\varphi_x - \varphi\|_{L^1_\omega(G)} \|e_1\|$$

assure la continuité de L sur E_{ess}.

Exemple 2.3.2. Les espaces $L^p_\omega(G),\ 1 \leq p \leq +\infty$ sont des L^1_ω-modules et pour $1 \leq p < +\infty$, ils sont essentiels.

En effet, si $f \in L^p_\omega(G)$ et $\varphi \in L^1_\omega(G)$ la convolution classique donne

$$\begin{aligned} \| \int L_x f\ \varphi(x) dx \|_{L^p_\omega(G)} \leq \int \|L_x f\|_{L^p_\omega(G)} |\varphi(x)| dx &\leq \|f\|_{L^p_\omega(G)} \int \omega(-x) |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^p_\omega(G)} \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \end{aligned}$$

ω étant symétrique.

Pour $1 \leq p < +\infty$, une u.a.b. $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ de $L^1_\omega(G)$ est aussi une u.a.b. pour $L^p_\omega(G)$, *i.e.* $L^p_\omega(G)$ est essentiel.

Par contre pour $p = \infty$, il est immédiat de vérifier que la partie essentielle $(L^\infty_\omega(G))_{\text{ess}}$ est contenue dans $(L^\infty_\omega(G))_c (\subsetneqq C^\infty_\omega(G))$. La réciproque est classique et est démontrée plus généralement dans la partie suivante.

2.4 Translation compatible

Un $L^1_\omega(G)$-module E admet une G-action si E est aussi un G-module et si la G-action L vérifie

$$L_x T_\varphi = T_\varphi L_x = T_{\varphi_x}$$

où $\varphi_x(y) = \varphi(y - x)$, $\forall x, y \in G$, $\forall \varphi \in L^1_\omega(G)$.

Lemme 2.4.1. *E_{ess} admet une G-action L définie pour tout $\varphi \in L^1_\omega(G)$, $e \in E$ par :*

$$T\varphi(e) = \int_{x \in G} \varphi(x)\, L_x\, e\, dx \quad \textit{et} \quad \|L_x\| \leq \omega(x).$$

D'après la remarque 2.3.1, E_{ess} admet une unique G action ; pour $e = \varphi * e_1$, $\varphi \in L^1_\omega(G)$, $e_1 \in E$, la G-action L est unique et donnée par

$$L_x\, e = \varphi_x * e_1.$$

De plus, l'inégalité $\|L_x\, e - e\| = \|\varphi_x * e_1 - \varphi * e_1\| \leq \|\varphi_x - \varphi\|_{L^1_\omega(G)} \|e_1\|$ par continuité de la translation dans $L^1_\omega(G)$ assure que si E admet une G-action compatible, E_{ess} est contenu dans E_c.

Comme dans ([6], [13]) l'action de $L^1_\omega(G)$ dans E vérifie, en utilisant les intégrales vectorielles :

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi_1(x) &= \int \varphi(y)\psi_1(x-y)dy \\
T_{\varphi * \psi_1} &= T \int \varphi(y)\psi_1(x-y)dy = \int \varphi(y) L_y T_{\psi_1} dy \\
T_{\varphi * \psi_1}(e_1) = T_\varphi\, T_{\psi_1}(e_1) &= \int \varphi(y) L_y (T_{\psi_1}\, e_1) dy
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi, \psi_1 \in L^1_\omega(G)$, $e_1 \in E_{\text{ess}}$, *i.e.* comme tout e dans E_{ess} est de la forme $e = T_{\psi_1}(e_1), T_\varphi(e)$ s'écrit : $T_\varphi(e) = \int \varphi(y) L_y\, e\, dy, \varphi \in L^1_\omega(G)$ et $e \in E_{\text{ess}}$.

La norme de L_x est donnée par

$$\|L_x e\| = \lim_\alpha T_{(\mu_\alpha)_x} e = \int L_y(e)(\mu_{\alpha_x})(y) \leq \overline{\lim}_\alpha \|\mu_{\alpha_x}\|\ \|e\| = \omega(x)\|e\|$$

Lemme 2.4.2. *Dans un G_ω-module E, la partie E_c admet une structure de $L^1_\omega(G)$-module avec G-action pour tout poids vérifiant $\|L_x\| \leq \omega(x)$. L'action T de $L^1_\omega(G)$ est donnée par*

$$T_\varphi(e) = \int_G L_x e\ \varphi(x) dx, \ \ e \in E, \varphi \in L^1_\omega(G).$$

Sur E_c, la G-action L étant continue, pour $\varphi \in L^1_\omega(G)$, l'inégalité

$$\| \int L_x e \varphi(x)\ dx\| \leq \int \|L_x e\| |\varphi|(x)\ dx \leq \|e\| \int \|L_x\| |\varphi|(x)\ dx \leq \|e\|\ \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)}$$

montre que l'intégrale vectorielle

$$T_\varphi(e) = \int L_x e\ \varphi(x) dx.$$

définit un morphisme d'algèbre T de $L^1_\omega(G)$ dans $L(E, E)$ vérifiant

$$\begin{aligned}
&\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \\
&T_\varphi(L_x e) = (T_{\varphi_x})(e) = L_x(T_\varphi\, e).
\end{aligned}$$

Lemme 2.4.3. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre avec G-action et $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ une u.a.b. de $L^1_\omega(G)$:*

- *$\{\mu_\alpha * e\}_\alpha$ admet un point adhérent e_1 si et seulement si $e \in E_{\text{ess}}$; dans ces conditions $e_1 = e$;*
- *$\{L_{x_\beta}(e)\}$ admet un point adhérent e_1 lorsque $x_\beta \to 0$ si et seulement si $e \in E_c$; dans ces conditions $e_1 = e$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un sous-filtre $\mu_{\alpha'} * e$ tel que $\lim_{\alpha'} \mu_{\alpha'} * e = e_1$ et pour tout $\varphi \in L^1_\omega(G)$:

$$\varphi * e_1 = \lim_{\alpha'} \mu_{\alpha'} * \varphi * e = \varphi * e$$

i.e. $\varphi * (e_1 - e) = 0$ pour tout φ et $e_1 - e \in E_{\deg} = \{0\}$.

De la même façon si $\lim_\beta L_{x_\beta} e = e_1$ pour tout $\varphi \in L^1_\omega(G)$,

$$\varphi * e = \lim_\beta \varphi_{x_\beta} * e = \lim_\beta (L_{x_\beta}\varphi * e) = \lim_\beta (\varphi * L_{x_\beta} e) = \varphi * e_1$$

i.e. $e_1 - e \in E_{\deg} = \{0\}$. □

Définition 2.4.4. *Une G-action et une $L^1_\omega(G)$-action sont dites compatibles s'il existe a et $b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :*

i) $L_x(\varphi * e) = \varphi_x * e = \varphi * L_x e$, $\forall x \in G$, $\forall e \in E$, $\forall \varphi \in L^1_\omega(G)$;

ii) $a\|L_x\| \leq \omega(x) \leq b\|L_x\|,\ x \in G$.

Remarque 2.4.5.

1. E_{ess} est un $L^1_\omega(G)$-module avec G-action qui vérifie $\|L_x\| \leq \omega(x)$;
2. la condition ii) est inutile dans le cas des G-actions isométriques ;
3. un $L^1_\omega(G)$-module est aussi un $L^1_{\omega_1}(G)$ dès que $w(x) \leq \omega_1(x), x \in G$.

Théorème 2.4.6. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module avec G-action compatible ; les sous-espaces E_{ess} et E_c coïncident.*

Démonstration. D'après le lemme 2.4.1, E_{ess} est contenu dans E_c et pour tout $e = \varphi * e_1 \in E_{\text{ess}}$ le translaté $L_x e$ s'écrit $L_x\, e = \varphi_x * e_1 = \varphi * L_x\, e_1$.

D'après le lemme 2.4.2 et la condition de compatibilité ii), E_c est aussi un $L^1_\omega(G)$-module pour la $L^1_\omega(G)$-action donnée par l'intégrale vectorielle

$$I_\varphi(e) = \int L_x\, e\, \varphi(x) dx\ ,\ \varphi \in L^1_\omega(G).$$

□

2.5 Module dual

Le dual E' d'un $L^1_\omega(G)$-module est aussi un $L^1_\omega(G)$-module pour la $L^1_\omega(G)$-action définie par

$$\langle T^*_\varphi(e'), e\rangle = \langle e', T_\varphi(e)\rangle, \quad \varphi \in L^1_\omega(G) \quad e' \in E', \quad e \in E.$$

De la même façon pour un G-module, la G-action est définie par

$$\langle L^\star_x e', e\rangle = \langle e', L_x e\rangle.$$

La partie dégénérée $(E')_{\deg}$ dans E' est l'orthogonal de la partie essentielle E_{ess} de E et E' est sans ordre si et seulement si E est essentiel.

2.6 Exemples

Soit ω un poids sur G

- Les espaces $L^p_\omega(G) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(G) |\ f\omega \in L^p(G),\ \|f\|_{L^p_\omega(G)} = \|f\omega\|_{L^p(G)}\}$ et $L^p_{\omega^{-1}}(G) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(G) |\ f\frac{1}{\omega} \in L^p(G), \|f\|_{L^p_{\omega^{-1}(G)}} = \|f\frac{1}{\omega}\|_{L^p(G)}\}$ sont des $L^1_\omega(G)$-modules et la translation est la G-action compatible, $1 \leq p \leq +\infty$;
- pour $1 \leq p < +\infty$ des espaces $L^p_\omega(G)$ et $L^p_{\omega^{-1}}(G)$ sont essentiels ;
- $(L^\infty_{\omega^{-1}}(G))_{\mathrm{ess}}$ contient l'ensemble $\{f$ bornée et uniformément continue sur $G\}$;
- si $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty, (L^\infty_{\omega^{-1}}(G))_{\mathrm{ess}}$ contient l'ensemble $\{f$ bornée et continue sur $G\}$;
- soit E un espace de Banach et S un opérateur borné et inversible ; E est un $\ell^1_\omega(Z)$-module avec $\mathbb{Z}$-action compatible pour :
  - $\omega(n) = \max(\|T^n\|, \|T^{-n}\|)$;
  - $L_n e = S^n e, n \in \mathbb{Z}$ et $e \in E$;
  - $T_a(e) = a * e = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\ S^n e, a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1_\omega(\mathbb{Z})$ et $e \in E$.

3 Homomorphismes

3.1 Cas général

Soit A un opérateur linéaire (borné) sur un $L^1_\omega(G)$-module E ; puisque sur la partie essentielle de E il y a deux structures, il existe deux notions d'homomorphismes.

A est :

- invariant si A commute avec les opérateurs de "translation" :
  $AL_x = L_x A$ pour tout $x \in G$ *i.e.* $A \in \mathrm{Hom}_G(E, E)$;
- un multiplicateur si A commute avec les opérateurs de "convolution" :
  $AT_\varphi = T_\varphi A$ $(A(*e) = *A(e))$ pour tout $\varphi \in L^1_\omega(G)$, *i.e.* $A \in \mathrm{Hom}_{L^1_\omega(G)}(E, E)$.

L'équivalence des deux notions est un problème classique d'analyse harmonique [5].

Théorème 3.1.1. *Soit E et F deux $L^1_\omega(G)$-modules avec G-actions compatibles, E essentiel :*

$$\mathrm{Hom}_{L^1_\omega(G)}(E,F) \subset \mathrm{Hom}_G(E,F).$$

Si de plus F est sans ordre, les deux espaces coïncident $\mathrm{Hom}_{L^1_\omega(G)}(E,F) = \mathrm{Hom}_G(E,F)$.

3.2 Cas particulier $E = L^1_\omega(G)$

Les résultats suivants sont importants pour la définition de la presque périodicité.

Soit E un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre ; l'espace

$$\mathrm{Hom}_G(L^1_\omega(G),E) = \mathrm{Hom}_{L^1_\omega(G)}(L^1_\omega(G),E)$$

est noté $(L^1_\omega(G),E)$; cet espace est naturellement un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre avec une G-action compatible.

L'hypothèse E sans ordre implique que l'homomorphisme naturel $j : E \to (L^1_\omega(G),E)$ défini par $j(e)(f) = f * e$ est injective.

En général j n'est pas surjective, par exemple $(L^1_\omega(G), L^1_\omega(G)) \simeq M_\omega(G)$ où $M_\omega(G)$ est l'espace des mesures μ telles que $\mu\,\omega$ est bornée [10].

Lemme 3.2.1. *$j(E)$ est dense dans $(L^1_\omega(E),E)$ pour la topologie forte d'opérateurs avec $j(E) \subset (L^1_\omega(G),E) \subset (L^1_\omega(G),E_{\mathrm{ess}})$.*

Démonstration. Soit A dans $(L^1_\omega(G),E)$ et $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ une u.a.b. de $L^1_\omega(G)$; les égalités

$$A(f) = \lim_\alpha A(\mu_\alpha * f) = \lim_\alpha \mu_\alpha * (A(f)) = \lim_\alpha f * (A(\mu_\alpha))$$

montrent que $j(E)$ est dense et puisque $(A\mu_\alpha) \in E$, que $(A(f)) \in E_{\mathrm{ess}}$. □

Théorème 3.2.2. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module ; les espaces suivants sont isomorphes :*

i) $(L^1_\omega(G),E) \cong (L^1_\omega(G),E_{\mathrm{ess}})$;

ii) $(L^1_\omega(G),E)_{\mathrm{ess}} \cong E_{\mathrm{ess}}$;

iii) $(L^1_\omega(G),(L^1_\omega(G),E)) \cong (L^1_\omega(G),E)$;

iv) $(L^1_\omega(G),E') \cong (E_{\mathrm{ess}})'$.

Démonstration.

- i) et ii) résultent du lemme précédent ;
- iii) est une conséquence de i) et ii) par

$$(L^1_\omega(G),(L^1_\omega(G),E)) \cong (L^1_\omega(G),(L^1_\omega(G),E)_{\mathrm{ess}}) \cong (L^1_\omega(G),E_{\mathrm{ess}}) \cong (L^1_\omega(G),E)$$ □

Le résultat classique $H_A(X,Y') \cong (X \otimes_A Y)'$ (*cf.* par exemple [16]) s'écrit ici

$$\mathrm{Hom}_{L^1_\omega(G)}(L^1_\omega(G),E') \cong (L^1_\omega(G) \otimes_{L^1_\omega(G)} E)' \cong (L^1_\omega(G) * E)' \cong (E_{\mathrm{ess}})'.$$

Corollaire 3.2.3. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module ; E essentiel implique $(L^1_\omega(G),E') \cong E'$; E sans ordre et réflexif implique que E est essentiel avec $(L^1_\omega(G),E) \cong E$.*

Démonstration.

- $(L^1_\omega(G),E') \cong (E_{\mathrm{ess}})' \cong E'$;
- $(L^1_\omega(G),E) \cong (L^1_\omega(G),(E')') \cong ((E')_{\mathrm{ess}})' \cong (E')' = E$.

∎

3.3 Exemples

$$(L^1_\omega(G),L^p_\omega(G)) \cong L^p_\omega(G), \quad 1 \le p < +\infty$$
$$(L^1_\omega(G),L^p_{\omega^{-1}}(G)) \cong L^p_{\omega^{-1}}(G), \quad 1 \le p < +\infty$$
$$(L^1_\omega(G),L^\infty_\omega(G)) \cong (L^1_{\omega^{-1}}(G))' = L^\infty_\omega(G)$$
$$(L^1_\omega(G),L^\infty_{\omega^{-1}}(G)) \cong (L^1_\omega(G))' = L^\infty_{\omega^{-1}}(G).$$

4 Presque périodicité avec poids

Le concept classique de la presque périodicité au sens de Bochner (Normal function [1]) pour une fonction continue est basé sur la relative compacité de son orbite sous l'action de la translation L_x. Plus généralement, un élément e d'un G-module E vérifiant $\{L_x(e),\ x \in G\}$ est relativement compact est dit presque périodique ; l'ensemble des éléments vérifiant cette propriété est noté E_{ap}. Pour une étude de E_{ap} il suffit de le considérer comme un sous-espace de $C_b(G,E)$ en utilisant le prolongement $e \mapsto f(x) = L_x e$ et de se reporter au cas classique. Mais en général la G-action L_x n'est pas une isométrie, la définition suivante est naturelle.

Définition 4.0.1. *Soit E un G-module ; $e \in E$ est dit presque périodique avec poids si l'orbite pondérée $\{\frac{L_x e}{\|L_x\|},\ x \in G\}$ est relativement compacte dans E ; l'ensemble de ces éléments est noté E^L_{ap}.*

Il est clair que E^L_{ap} est un espace linéaire fermé et que c'est un sous-G-module de E et même de E_c si l'application $x \mapsto \|L_x\|$ est localement bornée ; en effet la relative compacité de l'orbite implique que $\{L_x e\}_{x\in G}$ admet une valeur d'adhérence lorsque x tend vers zéro, *i.e.* d'après le lemme 2.4.3 , $e \in E_c$.

Remarque 4.0.2. Dans le cadre des $L^1_\omega(G)$-modules sans ordre avec G-action compatible, les définitions suivantes sont équivalentes :

i) $\theta_1 = \{\frac{L_x e}{\|L_x\|},\ x \in G\}$ est relativement compact ($e \in E^L_{ap}$)

ii) $\theta_2 = \{\frac{L_x e}{\omega(x)},\ x \in G\}$ est relativement compact ($e \in E^\omega_{ap}$), (ω-presque périodicité).

Il suffit de remarquer que si K est un compact de E l'ensemble $I \cdot K = \{\lambda k | x \in I, k \in K\}$ est aussi un compact pour tout intervalle I compact de $\mathbb{R}$.

Si a et b sont tels que $a\|L_x\| \leq \omega(x) \leq b\|L_x\|$ alors :

$$\theta_2 \subset \left[0, \frac{1}{a}\right]\theta_1 \quad \text{et} \quad \theta_1 \subset [a,b]\theta_2.$$

Remarque 4.0.3. Puisque $\omega(x) \geq 1$ pour tout x la relative compacité de $\{L_x\, e, x \in G\}$ implique celle de $\{\frac{L_x}{\omega(x)}, x \in G\} \subset [0,1]\{L_x\, e, x \in G\}$, *i.e.* la presque périodicité implique la presque périodicité avec poids $E_{ap} \subset E^L_{ap} = E^\omega_{ap}$.

Les deux notions coïncident si le poids est borné, ce qui correspond au fait que l'ensemble $\{\|L_x\|, x \in G\}$ est bornée, ce qui est aussi équivalent au cas d'un groupe d'isométries. Le résultat classique pour $\omega = 1$ obtenu dans [6], [12], s'écrit ici :

Théorème 4.0.4. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre avec G-action compatible ; pour $e \in E$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\left\{\frac{L_x\, e}{\omega(x)}, x \in G\right\}$ *est relativement compact ;*

(ii) $j(e)\ : \varphi \in L^1_\omega(G) \to \varphi * e \in E$ *est un multiplicateur compact.*

Remarque 4.0.5. La condition (i) implique que e est dans le sous-espace E_c qui admet une structure de $L^1_\omega(G)$-module.

La condition (ii) implique que $\{\mu_\alpha * e\}_\alpha$ admet une valeur d'adhérence, *i.e.* e est dans E_{ess} qui admet une G-action.

Corollaire 4.0.6. *Soit E un $L^1_\omega(G)$-module sans ordre avec G-action compatible ; pour tout multiplicateur compact C de $L^1_\omega(G)$ dans E il existe un unique élément $e \in E^\omega_{ap}$ tel que $C(\varphi) = \varphi * e$, $\varphi \in L^1_\omega(G)$.*

Le résultat suivant peut s'écrire en utilisant les notations de [14]

$$K(L^1_\omega(G), E) = (L^1_\omega, E)^\omega_{ap} = E^\omega_{ap}$$

où $K(L^1_\omega(G), E)$ sont les multiplicateurs compacts et $(L^1_\omega(G), E)^\omega_{ap}$ sont les éléments presque périodiques avec poids du $L^1_\omega(G)$-module $(L^1_\omega(G), E)$.

Démonstration du corollaire 4.0.6. Soit $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ une u.a.b. de $L^1_\omega(G)$; l'ensemble $\left\{\frac{L_x C(\mu_\alpha)}{\omega(x)}, x \in G\right\}$ est relativement compact, *i.e.* $e_\alpha = C(\mu_\alpha) \in E^\omega_{ap}$ et $\{e_\alpha\}_\alpha$ admet une valeur d'adhérence ; soit e un tel élément avec $e = \lim_\beta\ e_\beta$:

$$\lim_\beta\ C(\mu_\beta * \varphi) = C(\varphi) = \lim_\beta C(\mu_\beta) * \varphi = \lim_\beta e_\beta * \varphi = e * \varphi \quad ;$$

E étant sans ordre, e est unique. ∎

Démonstration du théorème 4.0.4. La condition (i) est équivalente au fait que l'enveloppe convexe $\mathcal{A} = \left\{ \sum_i a_i \frac{L_{x_i} e}{\omega(x_i)}, \sum |a_i| \leq 1 \right\} = \left\{ \sum_i a_i L_{x_i} e,\ \sum_i |a_i| \omega(x_i) \leq 1 \right\}$ soit relativement compacte dans E et pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que

$$\mathcal{A} \ \text{ et } \ \mathcal{B} = \left\{ \varphi * e|\ \varphi \in L^1_\omega(G),\ \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \leq 1 \right\}$$

ont la même adhérence dans E, *i.e.* $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$.

La méthode choisie en utilisant une approche barycentrique de l'intégrale est classique pour le cas $\omega(x) = 1$ (*cf.* [6], [15], [16]).

- (i) $\Rightarrow$ (ii) ou $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$.
  Soit $\varphi \in L^1_\omega(G)$ avec $\|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \leq 1$; sans restreindre la généralité ω peut-être considérée continue et φ à support compact K.

  Les applications $x \mapsto \omega(x)$ et $x \mapsto L_x e$, $e \in E_c$, étant continues sont uniformément continues sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des familles finies de $\{x_i\} \in K$ et $\{K_i\}$ voisinage relativement compact de zéro, $i = 1, \cdots, n$ telles que

$$\begin{aligned}
&x_i + K_i \cap x_j + K_j = \phi, \quad i \neq j \\
&\bigcup_{i=1}^n x_i + (K_i \cap K) = K \\
&|\omega(x_i + h) - \omega(x_i)| \leq \varepsilon, \quad h \in K_i \\
&|(L_{x_i+h} - L_{x_i})(e)| \leq \varepsilon, \quad h \in K_i.
\end{aligned}$$

  L'approche par des sommes discrètes des intégrales vectorielles donne :

$$\begin{aligned}
\|\varphi * e - \sum_{i=1}^n \int L_{x_i} e \varphi(x) dx\| &= \| \sum_{i=1}^n \int_{xi+k} (L_x e - L_{x_i} e) \varphi(x) dx \| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon \int_{x_i+K_i} |\varphi(x)| dx \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

  En notant $\alpha_i = \int_{x_i+K} \varphi(x) dx$, l'inégalité s'écrit $\|\varphi * e - \sum \alpha_i L_{x_i} e\| \leq \varepsilon$ avec

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \omega(x_i) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i+K_i} |f(x)| \omega(x_i)\ dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i+K_i} |f(x)| \omega(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_i+K_i} |f(x)| |\omega(x_i) - \omega(x)|\ dx \\
&\leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^1_{(G)}} + \|\varphi\|_{L^1_\omega(G)} \leq 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

En prenant $a_i = \frac{\alpha_i}{1+\alpha}$, les coefficients normalisés :

$$\begin{aligned}
\|\varphi * e - \sum_{i=1}^{n} a_i L_{x_i} e\| &\leq \|\varphi * e - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_{x_i} e\| + \| \sum_{i=1}^{n} (a_i - \alpha_i) L_{x_i} e\| \\
&\leq \varepsilon + \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_{x_i} e\| \Big(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\Big) \\
&\leq \varepsilon + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \omega(x_i) \frac{\|L_{x_i}\|}{\omega_{(x_i)}} \Big) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|e\| \\
&\leq \varepsilon + \frac{\|e\|}{a} \Big(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Big) = \varepsilon \Big(1 + \frac{\|e\|}{\|a\|} \Big)
\end{aligned}$$

i.e. $\varphi * e$ est adhérent à $\mathcal{A}$ ou encore $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) ou $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$.
  D'après la remarque ci-dessus, si e vérifie (ii) il est limite de $\mu_\alpha * e$ où $\{\mu_\alpha\}$ est une u.a.b. Pour $e_\alpha = \mu_\alpha * e$, comme $L_x e_\alpha = L_x \mu_\alpha * e$, *i.e.* pour tout x et tout α, $\frac{L_x e_\alpha}{\omega(x)} \in \mathcal{B}$; à la limite $\frac{L_x e}{\omega(x)} \in \overline{\mathcal{B}}$ et par convexité $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$. □

5 Bohr presque-périodicité avec poids

La définition classique de la presque périodicité des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ est basée sur la notion de relative densité des "presque-périodes" ([1], [2]) ou "ε-presque-périodes".

ℓ est dit ε-presque-période pour une fonction f si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $h \in [0, \ell[$ tel que $|f(x) - f(h)| < \varepsilon$.

Pour les fonctions continues, les presque-périodicités au sens de Bohr et au sens de Bochner coïncident ([6], [8]). La notation du Furstenberg ([8]) pour les fonctions uniformément récurrentes motive la définition suivante :

Définition 5.0.7. *Un élément e d'un G-module est dit "uniformément récurrent avec poids", si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de G tel que pour tout $x \in G$, il existe $k \in K$ tel que*

$$\Big\| \frac{L_x\, e}{\|L_x\|} - \frac{L_k\, e}{\|L_k\|} \Big\| < \varepsilon.$$

L'ensemble de ces éléments est noté E^L_{ur}.

Théorème 5.0.8. *Soit E un G-module avec $0 < \inf\{\|L_x\|, x \in G\} = \alpha$; les espaces $E_c \cap E^L_{ur}$ et E^L_{ap} coïncident.*

Démonstration.

- $E_{ap}^L \subset E_c \cap E_{ur}^L$.
  Soit $e \in E_{ap}^L \subset E_c$; comme l'orbite pondérée $\left\{\frac{L_x e}{\|L_x\|}, x \in G\right\}$ est relativement compacte, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de G tel que :
  $$\left\{\frac{L_x e}{\|L_x e\|}, x \in E\right\} \subset \bigcup_1^n \frac{L_{x_i} e}{\|L_{x_i}\|} + B(0,\varepsilon)$$
  i.e. si $K = \{x_i, \ldots, x_n\}$ pour tout $x \in G$, il existe $k \in K$ tel que
  $$\frac{L_x e}{\|L_x e\|} \in \frac{L_{x_k} e}{\|L_{x_k} e\|} + B(0,\varepsilon).$$
- $E_c \cap E_{ur}^L \subset E_{ap}^L$.
  Réciproquement, si $e \in E_{ur}^L \cap E_c$ l'application $x \to L_x e$ étant continue pour tout compact C de G l'ensemble
  $$\left\{\frac{L_x e}{\|L_x\|}, x \in C\right\} \subset \left[0, \frac{1}{\alpha}\right] \times \left\{L_x e, x \in C\right\}$$
  est relativement compact.

□

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $A = [0, \frac{1}{\alpha}] \times \{L_x e,\, x \in K\}$ tel que
$$\left\{\frac{L_x e}{\|L_x\|}, x \in G\right\} \subset \left\{\|L_x\|, x \in K\right\} + B(0,\varepsilon) \subset A + B(0,\varepsilon)$$
i.e. $\left\{\frac{L_x e}{\|L_x\|}, x \in G\right\}$ est relativement compact.

Remarque 5.0.9. E_{ur}^L n'est pas en général un ensemble linéaire [6].

Remarque 5.0.10. Soit E un $L_\omega^1(G)$-module avec G-action compatible ; l'image $f*e$ d'un élément $e \in E_{ur}^\omega$ par $f \in L_\omega^1(G)$ appartient à $E_{ur}^\omega \cap E_c$. La remarque 5.0.9 montre que $E_{ap}^\omega \subsetneqq E_{ur}^\omega \subsetneqq (L_\omega^1(G), E_{ap}^\omega)$.

6 Applications

6.1 Espaces $L_\omega^p(G)$

Les espaces $E = L_\omega^p(G),\ 1 \leq p \leq +\infty$ sont des $L_\omega^1(G)$-modules avec G-action compatible.

Pour $1 \leq p < +\infty,\ (L^p(G))_{ap} \neq \{0\}$ si et seulement si G est compact ([3], [4], [5]).

Théorème 6.1.1. *Soit G un groupe abélien localement compact non compact et ω un poids continu sur G avec $\overline{\lim}_{x\to\infty}\omega(x) = +\infty$; pour $1 \leq p \leq +\infty$,*
$(L_\omega^p(G))_{ap}^\omega = \{0\}$.

Remarque 6.1.2. Pour $\omega = 1, (L^\infty(G))_{ap} \neq \{0\}$, c'est l'ensemble des fonctions presque périodiques. La condition $\overline{\lim}_{x\to\infty}\omega(x) = +\infty$ est essentielle.

Remarque 6.1.3. Il n'est pas difficile de montrer qu'un poids tel que $\int_{t\in G} \frac{dt}{\omega^r(t)} < +\infty$ pour un $r \in [1, +\infty[$, vérifie $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = +\infty$.

Démonstration.

- **Cas** $1 \le p < +\infty$.
  Soit $f \neq 0$ dans $(L^p_\omega(G))^\omega_{ap}$; puisque $\left\{\frac{L_x f}{\|L_x\|}, x \in G\right\}$ est relativement compact dans $L^p_\omega(G)$, l'ensemble $\left\{h(x,y) = |\frac{f(y-x)}{\omega(x)}|^p, x \in G\right\}$ est relativement compact dans $L^1(G)$ ainsi que l'ensemble des transformées de Fourier $\{\hat{h}(x,\gamma), x \in G\}$ dans $C_0(\widehat{G})$; les transformées de Fourier s'écrivent :
$$\hat{h}(x,\gamma) = \int_{x\in G} \Big|\frac{f(y-x)}{\omega(x)}\Big|^p \overline{\langle\gamma, y\rangle}\, dy = \frac{1}{\omega(x)^p} \int_{u\in G} |f(u)|^p\, \overline{\langle\gamma, u\rangle}\; \overline{\langle\gamma, x\rangle}\, du$$
$$= \frac{\overline{\langle\gamma, x\rangle}}{\omega^p(x)}\, \widehat{|f|^p}(\gamma).$$
  Par hypothèse, il existe $\{x_\alpha\}_\alpha$ tel que $\lim_\alpha \omega(x_\alpha) = +\infty$ et $\frac{L_{x_\alpha} f}{\omega(x_\alpha)}$ converge dans $L^p_\omega(G)$. Cette limite notée g vérifie $|g|^p \in L^1$ avec
$$\widehat{|g|^p(\gamma)} = \lim_\alpha |\hat{h}(x_\alpha, \gamma)| \le \lim \widehat{|f|^p}(\gamma)\frac{1}{\omega^p(x_\alpha)} = 0, \quad \textit{i.e. } g \equiv 0.$$
  D'autre part les inégalités suivantes
$$\int_{x\in G} \Big|\frac{L_x f}{\omega(x)}\Big|^p \omega^p(y)\, dy = \int \Big|\frac{f(u)\omega(u+x)}{\omega(x)}\Big|^p du \ge \frac{1}{\omega^p(-u)} \int_{u\in G} |f(u)|^p du$$
  i.e. pour tout compact $K \subset G$ et
$$\Big\|\frac{L_x f}{\omega(x)}\Big\|_{L^p_\omega(G)} \ge \frac{1}{\sup\{\omega(k), k \in G\}} \Big(\int_h |f(u)|^p du\Big)^{\frac{1}{p}}$$
  montrent que $\lim\big\|\frac{L_{x_\alpha}}{\omega(x_\alpha)}\big\| \neq 0$ si $f \not\equiv 0$. La seule fonction presque périodique avec poids dans ce cas, est la fonction nulle.

- **Cas** $p = \infty$.
  Un raisonnement analogue au précédent, en utilisant les fonctions $h(x,y) = \varphi(y)\frac{f(y-x)}{\omega(x)}\,\omega(y)$ pour une fonction quelconque $\varphi \in L^1_\omega(G) \subset L^1(G)$ montre qu'il existe $\{x_\alpha\}_\alpha$ tel que $\lim_\alpha \omega(x_\alpha) = \infty$ et $\lim_\alpha \frac{L_{x_\alpha} f}{\omega(x_\alpha)} = 0$.
  D'autre part
$$\Big|\frac{f(u)}{\omega(-u)}\Big| = \Big|\frac{f(y-x)}{\omega(x-y)}\Big| \le \Big|\frac{f(y-x)}{\omega(x)}\Big|\omega(y) \le \Big\|\frac{{}_x f}{\omega(x)}\Big\|_{L^\infty_\omega(G)}.$$
  La limite de $\frac{L_{x_\alpha} f}{\omega(x_\alpha)} = 0$ ne peut être nulle que pour $f \equiv 0$.
  La seule fonction presque périodique avec poids est la fonction nulle. □

6.2 Espace $L^p_{\omega^{-1}}$

Contrairement au cas précédent, les espaces $(L^p_{\omega^{-1}})_{ap}$ et $(L^p_{\omega^{-1}})^{\omega}_{ap}$ peuvent être assez riches ; en effet si le poids est tel que $\int_{t\in G}\frac{dt}{\omega(t)} < +\infty$, il y a un prolongement naturel de $L^{\infty}(G)$ dans $L^1_{\omega^{-1}}(G)$, et par continuité la compacité du $\{L^*_x g, x \in G\}$ dans $L^{\infty}(G)$ implique celle de son image dans $L^p_{\omega^{-1}}(G)$.

Plus généralement les résultats suivants sont immédiats :

Résultat 6.2.1. *Soit ω un poids vérifiant $\frac{1}{\omega} \in L^p(G)$; l'espace $(L^{\infty}(G))_{ap}$ des fonctions presque-périodiques est contenu dans $\left(L^p_{\omega^{-1}}(G)\right)_{ap} \subset \left(L^p_{\omega^{-1}}(G)\right)^{\omega}_{ap}$, $1 \leq p \leq +\infty$.*

Résultat 6.2.2. *Soit ω un poids vérifiant $\lim_{x\to\infty}\omega(x) = \infty$; l'espace $L^p(G)$ est contenu dans $\left(L^p_{\omega^{-1}}(G)\right)^{\omega}_{ap}$, $1 \leq p < \infty$ et l'espace C_{ucb} est contenu dans $\left(L^{\infty}_{\omega^{-1}}(G)\right)^{\omega}_{ap}$.*

7 Faible presque-périodicité avec poids

Comme pour le cas $\omega = 1$, un $L^1_{\omega}(G)$-module E avec G action compatible peut-être muni de plusieurs topologies et à chaque topologie correspond une notion de presque-périodicité.

En particulier, un élément est dit faiblement presque-périodique avec poids si son orbite pondérée est faiblement relativement compacte ; l'espace de ces éléments est noté $E^{\omega}_{\mathrm{fap}}$.

Lorsque E est sans ordre, l'application j de E dans (L^1, E) étant une injection, il est possible de considérer sur l'image de E dans (L^1, E) la topologie forte d'opérateurs (TFO) et la topologie faible d'opérateur (Tfo).

Les notions de presque-périodicité correspondantes sont reliées aux propriétés de compacité de multiplicateurs par le résultat suivant donné sans démonstration ([4], [7], [14]).

Théorème 7.0.3. *Soit E un $L^1_{\omega}(G)$-module sans ordre avec G-action compatible ; soit $T \in (L^1_{\omega} E)$ et $\sum_T = \{T(f) | f \in L^1_{\omega}(G), \|f\|_{L^1_{\omega}(G)} \leq 1\} \subset E$ et j l'injection canonique $j : E \to (L^1, E)$:*

- *$\sum_T$ est relativement compact dans E pour la norme si et seulement si $T \in E^{\omega}_{ap}$;*
- *$\sum_T$ est relativement faiblement compact dans E si et seulement si $T \in E^{\omega}_{fap}$;*
- *$j(\sum_T)$ est relativement compact dans (L^1, E) pour la topologie forte d'opérateurs si et seulement si $T \in (L^1, E^{\omega}_{ap})$;*
- *$j(\sum_T)$ est relativement faiblement compact dans (L^1, E) pour la topologie faible d'opérateurs si et seulement si $T \in (L^1, E^{\omega}_{fap})$.*

Références

[1] A.S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Cambridge Univer. Press Dover Pub. 1954.

[2] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, J. Springer, 1933.

[3] G. Crombez, *Compactness and Almost periodicity of Multipliers*, Canad. Math. Bull., 26-1 (1983), 58–62.

[4] G. Crombez & W. Gowaerts, *Completely continuous multipliers for $L^1(G)$ into $L^{\infty}(G)$*, Annales Institut Fourier (Grenoble), 32-2 (1984), 137–154.

[5] C. Datry, G. Muraz, *Analyse harmonique dans les modules de Banach, I : propriétés générales*, Bull. Sci. Math.,119 (1995), 299–337.

[6] C. Datry, G. Muraz, *Analyse harmonique dans les modules de Banach, II : presque périodicité et ergodicité*, Bull. Sci. Math., 120 (1996), 493–536.

[7] C. Datry, G. Muraz, *Multplier Problems*, Proceeding of the third Asian Mathematical Conference 2000, Diliman Philippines 23-27 october 2000.

[8] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press. Princeton, 1981.

[9] G. I. Gaudry, *Quasimeasures and Operators commuting with convolution*, Pacific J. Math., 18 (1966), 461–476.

[10] G. I. Gaudry, *Multipliers of Weighted Lebesgue and Measure Spaces*, Proc. Lond. Math. Soc., 19 (1969), 327–340.

[11] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol. 2, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[12] J. Kitchen, *Normed Modules and almost periodicity*, Monatsh.für Math., 70 (1966), 232–243.

[13] T. S. Liu, A. van Raooij and J. K. Wang, *Group Representation in Banach Spaces : Orbits and Almost Periodicity*, Studies and Essays presented to Yu-Why-Chen, Taïpeï, Math. Research Center (1970), 243–254.

[14] G. Muraz, *Multiplicateurs compacts*, Bull. Belg. Math. Soc., 4 (1997), 601–612.

[15] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Owford Univ. Press, London/NY, 1968.

[16] M. A. Rieffel, *Induced Banach Representation of Banach Algebras and Locally Compact Groups*, J. Funct. Anal. 1 (1967), 443–491.

[17] R. Spector, *Groupes localement isomorphes et transformation de Fourier avec poids*, Annales de l'Institut Fourier, 19-1 (1969), 195–217.

Received : 15.19.2008, Accepted : 07.02.2012.

Institut Fourier, UJF-CNRS 5582, 100, rue des Maths, 38402 St Martin d'Hères (France),
E-mail : gilbert@muraz.name

Istanbul University, Faculty of Sciences, Departments of Mathematics, 34134
Vezneciler/Istanbul-Turkey,
E-mail : oztops@istanbul.edu.tr