Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 55(103) No. 3, 2012, 275–279

Amélioration d' une inegalité de Markov

by
Michel Grandcolas

Abstract

We generalize the Markov inequality for a polynomial in [-1,1] to any convex of the plane including the position of the roots of this polynomial.

Soient P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ et n son degré, X est un convexe du plan. On considère p le nombre de zéros de P situés dans un domaine D simple proche X: $D = X + 1$, c'est à dire l'ensemble des points du plan dont la distance à X est inférieure ou égale à 1. On pose $\|P\| = \sup_{x\in X} |P(x)|$. Nous démontrons les inégalités: $\|P'\| \leq (n-p+\frac{2}{D(X)}pn)\|P\|$ où $D(X)$ est le diamètre de X. Nous obtenons aussi $\|P'\| \leq (n-p+\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(X)}pn)\|P\|$ où $t_{\mathbb{Z}}(X)$ est le diamètre transfini entier de X lorsque P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ces résultats affinent et généralisent l'inégalité de Markov $\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

Key Words: Diameter, transfinite diameter, roots of a polynomial.
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 26C05; Secondary 26C10, 26D05.

1 Introduction

Soient P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ et n son degré, X est un convexe du plan. On considère p le nombre de zéros de P situés dans un domaine D simple proche X: $D = X + 1$, c'est à dire l'ensemble des points du plan dont la distance à X est inférieure ou égale à 1. On pose $\|P\| = \sup_{x\in X} |P(x)|$. Nous démontrons les inégalités: $\|P'\| \leq (n-p+\frac{2}{D(X)}pn)\|P\|(1)$ où $D(X)$ est le diamètre de X. Nous obtenons aussi $\|P'\| \leq (n-p+\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(X)}pn)\|P\|(2)$ où $t_{\mathbb{Z}}(X)$ est le diamètre transfini entier de X lorsque P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ces résultats affinent et généralisent l'inégalité de Markov $\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. Ceci est possible grâce à la position des zéros de P. On voit par exemple que si $X = [a,b], t(X) = \frac{2}{b-a}$, l'inégalité de Markov donne $\|P'\| \leq \frac{2}{b-a}n^2\|P\|$ alors que (1) donne $\|P'\| \leq (n-p+\frac{2}{b-a}pn)\|P\|$. Elle est meilleure si $b-a \leq 2$, en effet, on a toujours $n-p+pn \leq n^2$ pour $0 \leq p \leq n$. La borne de Markov est obtenue lorsque toutes les racines de P sont dans D alors que $n-p+\frac{2}{b-a}pn$ diminuent plus P a de racines à l'extérieur de D.

Comme corollaires importants de ces résultat, on a: $\|P'\| \leq n\|P\|$ si P n'a pas de racine dans D.

La démonstration fait intervenir la dérivée logarithmique de P et quelques lemmes de géométrie des zéros des polynômes. Les zéros de P' sont situés dans l'enveloppe convexe des zéros de P d'après le théorème de Gauss Lucas, d'où l'intérêt d'étudier le lien entre les normes de P et P' (où la norme de P vaut $\sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$) dans un cadre plus général que l'inégalité de Markov.

Un résultat ressemblant à l'inégalité de Markov a été démontré par Bernstein [1]

$$\sup_{x\in D} |P'(x)| \leq n \sup_{x\in D} |P(x)|$$

où D est le disque unité mais la démonstration est fort différente car elle fait appel aux intégrales de Cauchy.

Dans le paragraphe 2, nous donnons les différents lemmes et l'énoncé du théorème, que nous montrons au paragraphe 3.

2 Quelque lemmes et enonce du théorèm

Lemme 1. *Soient n nombres complexes non nuls $a_1, a_2, ..., a_n$, il existe un complexe c, appelée moyenne harmonique de $a_1, a_2, ..., a_n$, c vérifie: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{c}$.*

On a:

1) $\inf(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|) \leq |c|$.

2) Si les n nombres complexes $a_1, a_2, ..., a_n$ sont de module supérieur ou égal à 1 alors $|c| \geq 1$.

Preuve. 1) On a $|\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}| \leq \frac{n}{\inf(|a_1|,|a_2|,...,|a_n|)}$ donc $|\frac{n}{c}| \leq \frac{n}{\inf(|a_1|,|a_2|,...,|a_n|)}$ donc $|c| \geq \inf(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$.

2) $|\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}| \leq |\frac{1}{a_1}| + |\frac{1}{a_2}| + ... + |\frac{1}{a_n}| \leq n$ donc $|c| \geq 1$.

Lemme 2. *Soient n nombres complexes $a_1, a_2, ..., a_n$ et X un convexe du plan de diamètre $D(X)$, on a:*

$\sup_{x\in X} |\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)| \geq (\frac{D(X)}{2n})^n$.

Preuve. On considère les points A et B de X tels que $AB = D(X)$.

On recouvre le segment $[A, B]$ par n disques de diamètre $\frac{D(X)}{n}$ centrés sur ce segment:

1) si on a moins de $n - 1$ complexes parmi $a_1, a_2, ..., a_n$ dans ces n disques, on choisit z parmi le centre de ces disques qui ne contient pas de racines de telle sorte que $|z - a_k| \geq \frac{D(X)}{2n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

2) si on a n complexes parmi $a_1, a_2, ..., a_n$ dans ces n disques, on découpe le segment $[A, B]$ en 2n intervalles de longueur $\frac{D(X)}{2n}$, on considère les bandes qui ont pour largeur ces intervalles; on a deux cas possibles

a) une bande extrêmale ne contient pas de racines, on choisit le complexe $z = a$ qui est l'affixe de A ou $z = b$ qui est l'affixe de A appartenant à cette bande et $|z - a_k| \geq \frac{D(X)}{2n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

b) les deux bandes extrêmales contiennent des racines, il y a donc $n-2$ racines à placer dans les $2n - 2$ bandes restantes, on a donc 2 bandes consécutives sans racine, on choisit z parmi le bord commun de ces bandes appartenant au segment $[A, B]$. On a encore $|z - a_k| \geq \frac{D(X)}{2n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

Lemme 2 bis. *Si P est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\|P\| = \sup_{x \in X} |P(x)|$, on a: $\|P\| \geq t_{\mathbb{Z}}(X)^n$.*

Preuve. Si on pose $t_n(X) = \min_{P \in \mathbb{Z}[X]} \|P\|^{\frac{1}{n}}$, il est connu que la suite $(t_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $t_{\mathbb{Z}}(X)$.

Lemme 3 . *Soit X un convexe de diamètre $D(X)$ et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont les racines sont les nombres complexes $a_1, a_2, ..., a_n$, on considère $z \in X$. Il existe un $j \in \{1, ..., n\}$ tel que l'on ait: $(|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) \leq (\frac{2n}{D(X)}) \sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|$.*

Preuve. Sinon s'il existe z et pour tout indice $j \in \{1, ..., n\}$ on a: $(|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) > (\frac{n}{t(X)}) \sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|$, ainsi $\prod_{j=1}^{n} (|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) > (\frac{n}{t(X)})^n (\sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^n$, on obtient ainsi $(\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^{n-1} \geq (\frac{2n}{D(X)})^n (\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^n$, d'où: $\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)| < (\frac{D(X)}{2n})^n$ ce qui est absurde d'après le lemme 2.

Lemme 3 bis. *Soit X un convexe et P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont les racines sont les nombres complexes $a_1, a_2, ..., a_n$, on considère $z \in X$. Il existe un $j \in \{1, ..., n\}$ tel que l'on ait: $(|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) \leq (\frac{n}{t_{\mathbb{Z}}(X)}) \sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|$.*

Preuve. Sinon s'il existe z et pour tout indice $j \in \{1, ..., n\}$ on a: $(|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) > (\frac{n}{t(X)}) \sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|$, ainsi $\prod_{j=1}^{n} (|\prod_{k=1, k \neq j}^{n} (z - a_k)|) > (\frac{n}{t_{\mathbb{Z}}(X)})^n (\sup_{x \in [a,b]} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^n$, on obtient ainsi $(\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^{n-1} \geq (\frac{n}{t_{\mathbb{Z}}(X)})^n (\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)|)^n$, d'où: $\sup_{x \in X} |\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)| < (\frac{t_{\mathbb{Z}}(X)}{n})^n$ ce qui est absurde d'après le lemme 2 bis car on aurait $t_{\mathbb{Z}}(X) > n(\|P\|)^{1/n}$.

Corollaire du Lemme 3. *Soit $1 \leq p \leq n$, P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).*

$\sum_{i=1}^{p} |\frac{1}{z - a_i}| \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq \frac{2}{D(X)} pn$.

(resp. $\sum_{i=1}^{p} |\frac{1}{z - a_i}| \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq \frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(X)} pn$*).*

Preuve. $\sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1, k \neq i}^{n} |z - a_k| \geq p \min_{i \in \{1, ..., n\}} \prod_{k=1, k \neq i}^{n} |z - a_k|$ donc: $\frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1, k \neq i}^{n} |z - a_k|} \geq \frac{1}{p \min_{i \in \{1, ..., n\}} \prod_{k=1, k \neq i}^{n} |z - a_k|} \geq \frac{D(X)}{2pn}$.

2.5. **Lemme 4.**

Si P est un polynôme non nul de degré n à coefficients complexes de racines $a_1, a_2, ..., a_n$ et z différent des précédentes racines alors $\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + ... + \frac{1}{z - a_n}$.

Remarque: $\frac{P'(z)}{P(z)}$ est la dérivée logarithmique de P et a été utilisé par Gauss et Lucas [2] pour montrer que les zéros de la dérivée d'un polynôme sont dans l'enveloppe convexe des zéros de ce polynôme.

Théorème. *Lorsque P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{Z}$), n son degré et p est le nombre de zéros de P situés dans $D = X + 1$, on a:*

$\frac{\|P'\|}{\|P\|} \leq n - p + np \frac{2}{D(X)}$

(resp. $\frac{\|P'\|}{\|P\|} \leq n - p + np\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(X)}$*)*

3 Preuve du théorèm

P est un polynôme non nul de degré n. On pose $\|P\| = \sup_{u\in X} |P(u)|$

1) On choisit $z \in X$ tel que $|P'(z)| = \sup_{u\in X} |P'(u)|$ si $P(z) \neq 0$ sinon si $P(z) = 0$, on choisit z tel que $|P'(z)| = \sup_{u\in[a,b]} |P'(u)| - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ arbitrairement petit) et $P(z) \neq 0$.

2) On va majorer $|\frac{P'(z)}{P(z)}| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|}$ en décomposant $\frac{P'(z)}{P(z)}$ en deux termes

D'après le lemme 4: $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}$ peut s'écrire aussi à $A + B$ en posant:

$A = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z-a_k}$ où $|z - a_k| < 1$ pour tout $k \in \{1, ..., p\}$

$B = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{z-a_k}$ où $|z - a_k| \geq 1$ pour tout $k \in \{p + 1, ..., n\}$ $(0 \leq p \leq n)$

3) Majoration de $|A| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|}$ par $\frac{2}{D(X)}np$ (ou $\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(X)}np$ si P est à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

On a d'après le corollaire du lemme 3: $\sum_{i=1}^{p} |\frac{1}{z-a_i}| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq \frac{2}{D(X)}pn$.

(ou $\sum_{i=1}^{p} |\frac{1}{z-a_i}| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq \frac{1}{t_{\mathbb{Z}}}pn$ si P est à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

4) Majoration de $|B| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|}$ par $n - p$:

D'après le lemme 1, il existe g vérifiant $|z - g| \geq 1$ tel que:

$B = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = \frac{n-p}{z-g}$

donc $|B| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq |\frac{n-p}{z-g}| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|} \leq n - p$ vu que $|P(z)| \leq \|P\|$ et $|z - g| \geq 1$.

5) Conclusion:

$\frac{\|P'\|-\epsilon}{\|P\|} \leq n - p + np\frac{2}{D(X)}$. Mais puisque $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, on a: $\frac{\|P'\|}{\|P\|} \leq n - p + np\frac{2}{D(X)}$. De plus les p racines vérifiant $|z - a_k| < 1$ pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ sont à une distance strictement inférieur à 1 de X.

6) Remarque: si on ne distingue pas les racines entre elles, On peut majorer $|\frac{P'(z)}{P(z)}| \times \frac{|P(z)|}{\|P\|}$ par le corollaire du lemme 3. On obtient: $\|P'\| \leq \frac{2}{D(X)}n^2\|P\|$

Remerciements. Merci à Michel Langevin pour m'avoir sensibilisé à ce genre de problèmes et à Georges Rhin pour de constructives discussions.

References

[1] Langevin M., Géométrie autour d'un théorème de Bernstein, Sém. de Th. des Nombres de Paris 1982-83, Birkhäuser (1984), p.143-160.

[2] Marden M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable (Mathematical Surveys Number 3, AMS, 1949).

[3] Markoff A., Ueber ein problem von D. I. Mendelejeff (Abh. derAkad. der Wiss. St Petersburg 62 (1889), 1-24.

Received: 24.09.2010, Accepted: 14.01.2012.

Dpartement de mathmatiques, Universit de Lorraine, Ile du Saulcy, 57045 Metz
E-mail: `grandcol@univ-metz.fr`