Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 55(103) No. 3, 2012, 249–274

Superficie algebriche con molti punti singolari isolati

by
Dionisio Gallarati

Abstract

Panoramica sul problema del massimo numero $\mu(n)$ di punti doppi isolati che può possedere una superficie algebrica di ordine n in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Maggiorazioni per $\mu(n)$ ed esempi di superficie con molti punti doppi.

Key Words: Surfaces in $\mathbb{P}3$, rational double points.
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 14B05, 14J25; Secondary 14Q10.

1 Introduzione

Tra i problemi ancora insoluti della Geometria Proiettiva, uno dei più difficili è senza dubbio quello di determinare il massimo numero $\mu(n,r)$ di punti doppi isolati che possa possedere una ipersuperficie algebrica F^n, di ordine n, appartenente allo spazio $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$. Per una storia di questo problema fino al 1950 cfr. [89].

Si può presumere che le ipersuperficie con il massimo numero di punti singolari isolati debbano essere cercate tra quelle aventi singolarità del tipo più semplice possibile, e precisamente *nodi,* ossia punti doppi con cono tangente del tipo più generale. Ed è questa l'ipotesi che si fa generalmente; accenneremo tuttavia a qualche interessante risultato in cui oltre ai nodi c'è qualche singolarità più elevata.

Mi occuperò prevalentemente di superficie di $\mathbb{P}^3$.

A distanza di più di mezzo secolo ritorno su questo argomento perché sebbene la questione della determinazione del massimo numero $\mu(n) = \mu(n,3)$ di punti doppi per superficie algebriche aventi solo singolarità isolate sia ancor lontana dalla soluzione, pure in questi ultimi cinquant'anni sono stati fatti alcuni passi importanti.

Avverto subito che il problema dei punti doppi delle superficie è molto marginale nella Geometria Algebrica. Si tratta di un particolare filone di ricerca che poco interferisce con i grandi problemi di cui si occupano attualmente i geometri; la sua non risoluzione non disturba affatto il continuo e rapido progredire della Scienza, appunto perché non è collegato con alcuna delle tematiche di moda. Esso si presenta in modo spontaneo, come naturale estensione dell'analogo problema per curve piane; ed il suo interesse sta soprattutto nel fatto che nonostante i ripetuti tentativi compiuti da numerosi matematici non si sia ancora riusciti a trovare la strada giusta per affrontarlo, al punto che si è pervenuti alla convinzione che una strada non ci sia e che ogni passo debba essere fatto con molta fatica ricorrendo ad una idea o ad un artificio escogitato ad hoc.

È un problema la cui formulazione è molto elementare: poche nozioni matematiche sono sufficienti per capire di che si tratti e per tentare di arrecarvi qualche contributo. Ciò spiega come mai alcuni risultati non banali siano stati ottenuti anche da matematici che solo occasionalmente si siano interessati all'argomento.

È ben noto che una curva algebrica piana irriducibile di ordine n non può possedere più di $\binom{n-1}{2}$ punti doppi. Questo fatto si trova sostanzialmente già in [21] anche se il teorema di Bézout su cui esso è basato è solo del 1765. Nella forma in cui oggi viene abitualmente presentato si trova per la prima volta in [59] ove viene anche osservato che il limite massimo $\binom{n-1}{2}$ è raggiunto per ogni n e che le curve algebriche piane d'ordine n con $\binom{n-1}{2}$ punti doppi sono razionali; ed anzi è esattamente $\binom{n-1}{2}$ il numero dei punti doppi di una curva piana razionale d'ordine n le cui singolarità siano soltanto nodi (cioè punti doppi a tangenti distinte) oppure cuspidi di prima specie (cioè punti doppi a tangenti coincidenti in una retta ad incontro tripunto con la curva nel punto di contatto).

Per quanto riguarda le curve piane la questione dei nodi è dunque molto elementare e non c'è più nulla da scoprire.

Per le superficie si hanno invece risultati sporadici. A parte i casi banali $n = 1$ ed $n = 2$ ed i casi ben noti già nella seconda metà del 1800 ($\mu(3) = 4$ e $\mu(4) = 16$) oggi sappiamo soltanto che:

$$\mu(5) = 31 \qquad , \qquad \mu(6) = 65.$$

Una superficie del quinto ordine con 31 nodi è stata scoperta da E. G. Togliatti [91] nel 1940 ed A. Beauville [7] ha dimostrato nel 1979 che una superficie del quinto ordine non può possedere più di 31 nodi; W. Barth [4] ha esibito nel 1996 una superficie sestica con 65 nodi. e D. B. Jaffe e D. Ruberman [42] hanno provato nel 1997 che $\mu(6) \leq 65$. Altre prove di quest'ultimo risultato sono state date da J. Wahl [99] nel 1998 e da R. Pignatelli e R. Tonoli [58] nel 2009.[1]

La situazione attuale, per le superficie d'ordine ≤ 12 di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è riassunta nella seguente tabella.

[1] Nelle citazioni mi riferisco sempre all'anno in cui un risultato è effettivamente comparso nelle riviste matematiche, correndo il rischio di non rispettare le priorità. Per esempio Jaff e Ruberman affermano in una nota a pié di pagina di [42] di essere stati informati che della disuguagliaza $\mu(6) \leq 65$ esisteva già una dimostrazione di Wahl che non conoscevano. Il risultato va comunque attribuito a Jaffe e Ruberman, perché la prova di Wahl fa uso di un teorema errato di Casnati e Catanese [13], teorema che gli stessi Casnati e Catanese hanno corretto, cfr. anche [14].

n	$\mu(n) \leq$	$\mu(n) \geq$
2	**1**	**1**
3	**4** (Basset)	**4** (Cayley)
4	**16** (Basset)	**16** (Kummer)
5	**31** (Beauville, 1979) (Nobili, Givental, Varchenko)	**31** (Togliatti, 1940) (Stagnaro, Barth)
6	**65** (Jaffe-Ruberman, 1997)	**65** (Barth, 1996)
7	104 (Givental, Varchenko)	99 (Labs)
8	171 (Givental)	168 (Endrass)
9	246 (Varchenko)	216 (Chmutov)
10	360 (Miyaoka)	345 (Barth)
11	480 (Varchenko)	425 (Chmutov)
12	645 (Miyaoka)	600 (Goryunov, Sarti)

2 Alla ricerca di maggiorazioni per $\mu(n)$

2.1. Essendo del tutto sconosciuto il numero $\mu(n)$, la prima cosa da fare è di limitarlo superiormente, sia pure con confini a tutta prima troppo alti. Osserviamo subito, con B. Segre [67], che a differenza di quanto avviene per le curve piane, una formula del tipo $\mu(n) = p(n)$ con p polinomio non può sussistere.

Una prima limitazione per $\mu(n)$ si ottiene considerando la classe

$$\nu = n(n-1)^2 - 2d$$

di una superficie F^n d'ordine n le cui singolarità siano soltanto d nodi. Il genere geometrico p_g della superficie duale G^ν le cui singolarità sono certamente più complicate di quelle di F^n, non supera $\binom{\nu-1}{3}$. Esso d'altra parte coincide con il genere geometrico $p_g = \binom{n-1}{3}$ di F^n, sicché

$$\binom{n-1}{3} \leq \binom{\nu-1}{3}$$

e quindi $n \leq \nu$. Ciò porta alla disuguaglianza

$$\mu(n) \leq \frac{1}{2}n^2(n-2)$$

che per n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... dà per $\mu(n)$ i confini superiori 4, 16, 37 , 72, 122, 192, 283, 400,...

Consideriamo il cono Γ circoscritto ad una F^n con d nodi da un punto generico O dello spazio. Γ ha ordine $n(n-1)$ e classe $n(n-1)^2-2d$ e possiede $n(n-1)(n-2)$ generatrici doppie cuspidali. Le formule di Plücker dànno il numero $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+d$ delle generatrici doppie nodali [tra le quali ci sono le d rette che congiungono O con i d nodi di F^n], il numero $4n(n-1)(n-2)-6d$ delle generatrici di flesso, e quindi il numero

$$2d^2 - 2[n(n-1)^2 - 5]d + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12) \tag{1}$$

dei piani bitangenti di Γ(cfr.[62], [63]). Per $n = 5$ il trinomio (1) si annulla se $d = 15$, oppure $d = 16$.

Se, come ha fatto B. Basset nel 1906, si scrive che il numero dei piani bitangenti di Γ non può essere negativo si trova subito la *disuguagliaza di Basset*

$$d \leq \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - 5 - \sqrt{n(n-1)(3n-14)+25}] \tag{2}$$

(cfr. [5], [6]) utile solo per $n \geq 4$ perché per $n = 3$ il trinomio (2) non ha zeri reali. Essa fornisce per $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...$ i confini superiori 34, 66, 114, 181, 270, 383, 524, 694, ...

Data in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ una F^n generale, il suo contorno apparente su un dato piano α da un dato punto O, ossia la sezione γ di α con il cono Γ di prima, descrive in α un sistema continuo Σ di curve di ordine $n(n-1)$ aventi $d = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ nodi e $k = n(n-1)(n-2)$ cuspidi. Ogni volta che F^n, variando con continuità, acquista un nodo, anche γ acquista un nodo. Il problema del massimo numero di nodi per una F^n conduce quindi alla ricerca del mumero di punti doppi che si possono imporre ad una curva algebrica piana di dato ordine, che già possegga un assegnato numero di nodi ed un assegnato numero di cuspidi. Sotto questa forma il problema è stato affrontato da S. Lefschetz [49] e da T. R. Hollcroft [39], [40], [41] con considerazioni che fanno uso di quello che Lefschetz chiama *postulato delle singolarità* e che, nel caso delle curve piane, equivale ad affermare che, imponendo ad una curva piana di dato ordine di avere nuovi nodi e nuove cuspidi in più dei nodi e delle cuspidi che essa già possiede, le si impongono delle condizioni sempre nuove, cioè indipendenti fra loro e dalle precedenti.

Lefschetz ritrova ad esempio che una superficie quintica non può avere più di 34 nodi, ed il confine trovato da Hollcroft che dà gli stessi numeri di Basset per $n = 4, 5, 6$, non può essere accettato per $n \geq 7$. B. Segre [67], [68], [69] ha osservato che al sistema Σ non si può applicare il postulato di Lefschetz, in quanto la sua dimensione effettiva coincide con la dimensione del sistema lineare di tutte le F^n diminuita di 4 (perché una stessa curva di Σ è contorno apparente da O sopra un piano α di ∞^4 F^n deducibili da una di esse mediante le ∞^4 omologie di centro O) ed è quindi $\delta = \binom{n+3}{3} - 5$; mentre la dimensione virtuale, calcolata ammettendo che per Σ valga il postulato di Lefschetz, è $\delta^* = \frac{1}{2}n(n-1)[n(n-1)+3] - d - 2r = \frac{5}{2}n(n-1)$; e la differenza $\delta - \delta^* = \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ è positiva se $n \geq 5$.

Nel 1946 F. Severi [76] sperò di aver chiuso il problema provando che:

$$\mu(n) = \binom{n+2}{3} - 4. \tag{3}$$

Ma egli basava la sua dimostrazione sopra un fatto che considerava evidente, pur ammettendo di non essere in grado di verificarlo con rigore. L'argomentazione di Severi è sostanzialmente basata sulla nozione di moduli di una superficie. Poiché per una superficie con solo nodi i moduli altro non sono che i suoi invarianti proiettivi, la presenza dei d nodi abbassa il numero dei moduli di d unità *al più.*

E Severi giunge alla conclusione che il numero dei moduli, in conseguenza dell'acquisto dei d nodi, deve diminuire di d unità *almeno,* servendosi della cosidetta formula di Picard-Alexander [50]:

$$\varrho + \varrho_0 = I + 4q + 2;$$

q è l'rregolarità della superficie (nel nostro caso $q = 0$); I è l'invariante di Zeuthen e Segre [101], [73]; sul suo valore, che è $n(n-1)^2 - n - 2(n-1)(n-2)$, non influiscono per nulla i nodi della superficie, perciò $\varrho + \varrho_0$ non muta passando da una F^n generale ad una F^n con d nodi; ϱ_0 è il numero degli integrali doppi di seconda specie esistenti sulla superficie; ϱ è il numero base di Picard-Severi.

Per una F^n generale si ha $\varrho = 1$; per una F^n con d nodi è invece $\varrho \geq d + 1$ perché se F^* è il blow-up di F^n nei d nodi, per costruire una base per le curve algebriche di F^* oltre ad una sezione piana generica occorrono anche almeno le d curve razionali controimmagini dei nodi. Se dunque $\tilde{\varrho}$ è il numero degli integrali doppi di seconda specie indipendenti su una F^n generale, avremo $1 + \tilde{\varrho} = \varrho + \varrho_0 \geq (d + 1) + \varrho_0$; e quindi: $\varrho \leq \tilde{\varrho} - d$. Acquistando d nodi la superficie ha dunque perduto d integrali doppi di seconda specie. Ora, la perdita di un tale integrale significa che la Riemanniana perde un ciclo bidimensionale e quindi un periodo per ogni integrale doppio di prima specie; e Severi ritiene lecito pensare che si abbia quindi un abbassamento di una unità del numero dei moduli per ogni nuovo nodo; ma lui stesso non ne sembra convinto. Ecco infatti ciò che egli scrive a questo punto: *"la deduzione non è certo rigorosa: si tratta piuttosto di una induzione, sulla quale non sembra che possano cadere dubbi, anche in considerazione del fatto che per i primi valori di d è rigorosamente controllabile che l'abbassamento di una unità di ϱ_0 diminuisce ogni volta precisamente di una unità il numero dei moduli".*

Il risultato di Severi non era in contrasto con alcuno dei fatti allora noti, ma già nel 1947 B. Segre [70] ha indicato esempi di superficie che lo contraddicono.

Il più semplice esempio è dato dalle superficie di ordine n pari di equazione

$$P^2 - A_1 A_2 \cdots A_n = 0 \tag{4}$$

con $P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinomio omogeneo di grado $\frac{n}{2}$ ed A_j forme lineari. Il numero dei punti doppi che esse posseggono è in disaccordo con il risultato di Severi per ogni $n \geq 10$ e pari. E subito si trovano esempi analoghi per ogni n dispari ≥ 11. Basta considerare le superficie $A_0 P^2 - A_1 A_2 \cdots A_n = 0$ con P forma di grado $\frac{n-1}{2}$ ed A_j forme lineari; cfr. anche [26].

L'errore di Severi è stato analizzato da D. Burns e J. Wahl [11]: le superficie con più di $\binom{n+2}{3} - 4$ nodi sono superficie ostruite nel senso della teoria delle deformazioni.

In conclusione, fino al 1980, il miglior limite superiore per $\mu(n)$ era quello dato da A. B. Basset nel lontano 1906.

Osservazione 2.1. *Siano $F \subset \mathbb{P}^3$ una superficie d'ordine n e δ il numero delle condizioni indipendenti imposte da d nodi di F alle aggiunte di ordine $n-1$ che debbano contenerli. Poiché tra queste aggiunte ci sono le ∞^3 prime polari dei punti dello spazio, si ha $\binom{n+2}{3} - \delta \geq 4$, e quindi $\delta \leq \binom{n+2}{3} - 4$. Potremmo pertanto scrivere $d \leq \binom{n+2}{3} - 4$ solo se le condizioni imposte dai punti doppi alle aggiunte di ordine $n-1$ fossero indipendenti come avviene se $n = 5$.* [2]

[2] v. [57] per una dimostrazione del fatto che *i nodi di una superficie d'ordine n le cui singolarità siano soltanto nodi, impongono condizioni indipendenti alle superficie di ordine $\geq 2n - 5$.*

2.2. Il primo ad intervenire sul problema con metodi non tradizionali fu A. Beauville [7], che ha chiuso il problema per le superficie del quinto ordine giovandosi di proprietà dei *codici,* cioè dei sottospazi di uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$ di due soli elementi.

Siano $F \subset \mathbb{P}^3$ una superficie algebrica dotata di δ nodi, e $\mathcal{D}$ l'insieme dei suoi nodi.

Si dice che $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_\delta\} \subset \mathcal{D}$ è *un insieme pari,* se esiste su F una curva $\mathcal{C}$ passante semplicemente per i punti D_j (ma non per altri punti multipli di F) tale che $F \cdot G = 2C$, con $G \subset \mathbb{P}^3$ superficie d'ordine pari.

Ad esempio sopra una superficie cubica F^3 con quattro nodi è pari l'insieme $\mathcal{D}$ dei quattro nodi, in quanto una curva del terz'ordine appartenente ad F e passante per i quattro nodi è curva di contatto di F con un cono quadrico. Similmente è pari sopra una F^4 di Kummer l'insieme dei 16 nodi. Esistono infatti (infinite) superficie quartiche G (anch'esse superficie di Kummer) tangenti ad F^4 lungo curve $\mathcal{C}^8$ passanti per i 16 nodi. (v. [34]).

Proposizione 2.2. [35] *Il numero degli elementi di un insieme pari di nodi di una F^5 di $\mathbb{P}^3$ è multiplo di 4 e non può essere meno di 16.*[3]

Teorema 2.3. [7] $\mu(5) \leq 31$ (e quindi $\mu(5) = 31$).

Sia F una superficie d'ordine n di $\mathbb{P}^3$ avente come singolarità soltanto d nodi $D_1, D_2, \ldots, D_d$, e $\sigma : X \to F$ lo scoppiamento di questi punti. Se $E_j = \sigma^{-1} D_j$ $(j = 1, \ldots, d)$ sono i divisori eccezionali che corrispondono ai nodi, si ha:

$$E_j^2 = -2 \qquad , \qquad E_i E_j = 0 \quad i \neq j.$$

X è diffeomorfa ad una superficie non singolare di ordine n di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (v. [87]); pertanto essa è semplicemente connessa ed il suo secondo numero di Betti è $b_2(X) = n(n^2 - 4n + 6) - 2$.

Poiché $H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \simeq H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$, la forma bilineare non degenere e simmetrica

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

induce una forma bilineare simmetrica e non degenere

$$H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}};$$

se e_j sono gli elementi di $H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$ che corrispondono a divisori eccezionali E_j si ha (in $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$)

$$e_j^2 = 0 \qquad , \qquad e_i e_j = 0 \quad i \neq j. \tag{5}$$

Nello $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$-spazio vettoriale $H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$ (che ha dimensione $b_2(X)$) gli elementi e_j generano un sottospazio V che, in forza delle (5), è *totalmente isotropo* [4]. Infatti ogni elemento di V si può scrivere come somma di vettori e_j e risulta $\sum e_i \cdot \sum e_j = 0$. Pertanto: $\dim V \leq \frac{1}{2} \dim H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}) \leq \frac{1}{2} b_2(X)$.

[3] In [35] sono costruite, scrivendone le equazioni, tutte le F^5 con un insieme pari di 16 nodi e tutte le F^5 con un insieme pari di 20 nodi.

[4] Siano k un campo, W un k-spazio vettoriale di dimensione finita e $\varphi : W \otimes W \to k$ una forma bilineare simmetrica non degenere. Si dice che *un sottospazio vettoriale V di W è totalmente isotropo* se per ogni $v \in V$ risulta $\varphi(v, v) = 0$. Un noto teorema di algebra lineare afferma che $\dim_k V \leq \frac{1}{2} \dim_k W$.

Sia ora $n = 5$, e quindi $b_2(X) = 53$. Supponiamo che F^5 possegga 32 nodi. Alle rette $e_1, e_2, \ldots, e_{32}$ associamo un omomorfismo $\varphi : (\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})^{32} \to H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$. L'immagine di φ, che è un sottospazio totalmente isotropo di $H^2(X, \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$, ha dimensione ≤ 26 e quindi il nucleo di φ ha dimensione almeno 6. E ciò, in virtù di un risultato di teoria dei codici dovuto a M. Teissier-Daguenet, è in contrasto con la proposizione 2.2.

Il metodo di Beauville si può applicare alle superficie di qualunque ordine n, con difficoltà crescenti al crescere di n e già rilevanti per il caso $n = 6$ trattato da Jaffe e Ruberman in [42], dove si prova che sopra una F^6 con solo nodi, il numero degli elementi di un ogni insieme pari di nodi può essere soltanto 24, oppure 32, oppure 40, oppure 56, il che porta alla disuguaglianza $\mu(6) \leq 65$.[5]

2.1 Confini superiori per il numero di nodi di una ipersuperficie di dato ordine in $\mathbb{P}^r$.

Soltanto all'inizio degli anni ottanta sono stati trovati, per il numero dei nodi di una superficie, confini superiori più bassi di quelli di Basset, in particolare da J. W. Bruce, A. B. Givental, A. N. J. Varchenko, Y. Miyaoka.

2.3. Per il numero $\mu(n, r)$ di punti doppi isolati che possa avere una ipersuperficie d'ordine n di $\mathbb{P}^r$, J. W. Bruce [10] ha provato che:

$$\mu(n, r) \leq \frac{1}{2n}[(n-1)^r(n+1) + n - 1] \qquad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$\mu(n, r) \leq \frac{1}{2}(n-1)^r \qquad \text{se } r \text{ ed } n \text{ sono entrambi dispari}$$

$$\mu(n, r) \leq \frac{1}{2n}[(n-1)^r(n+1) + 1] \qquad \text{se } r \text{ è dispari ed } n \text{ è pari.}$$

In particolare, per le superficie di $\mathbb{P}^3$:

$$\mu(n) \leq \frac{1}{2}(n-1)^3 \qquad \text{se } n \text{ è dispari}$$

$$\mu(n) \leq \frac{1}{2n}[(n-1)^3(n+1) + 1] \qquad \text{se } n \text{ è pari.}$$

Questo risultato è migliore di tutti i precedenti per n dispari.

Ecco la tabella dei "numeri di Bruce" per i primi valori di n (per $r = 3$):

$n =$	5	6	7	8	9	10	...
$\mu \leq$	32	73	108	193	256	401	...

2.4. L'interesse di A. B. Givental e A.V.J. Varchenko per le singolarità isolate di una ipersuperficie nacque durante le discussioni con il loro comune maestro V. I. Arnold intorno all'articolo

[5] Cfr. [35], pag. 251.

di J. W. Bruce ed alla ben nota *congettura di Arnold* sulla semicontinuità dello spettro di ogni punto critico di una funzione olomorfa.

a) A. B. Givental [37], giovandosi anche di risultati di J. Steenbrink [83] (vedi anche [84]) relativi alle strutture miste di Hodge, ha migliorato il risultato di Bruce provando quanto segue. Siano :

M il numero delle r-ple ordinate $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ di numeri interi positivi e minori di n tali che:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = (\frac{1}{2}r + 2p)n \qquad (p \in \mathbb{Z});$$

K il numero delle r-ple ordinate $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ di numeri interi positivi e minori di n tali che:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = (\frac{1}{2}r + 2p - 1)n \qquad (p \in \mathbb{Z});$$

R il numero delle r-ple ordinate $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ di numeri interi positivi e minori di n tali che:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = (\frac{1}{2}r + 2p - 1)n \pm 1 \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=1}^{r} k_1 = (\frac{1}{2}r + 2p - 1)n \pm \frac{1}{2} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Allora:

$$\mu(n, r) \leq \frac{1}{2}[(n-1)^r + M - K - R].$$

In particolare, per $r = 3$ si ha:

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
$\mu(n) \leq$	4	16	31	68	104	171	253	362	$\ldots$

b) Ed ecco il risultato ottenuto da A. N. Varchenko [96] che, in un importante caso particolare, conferma la congettura di Arnold.

Sia $A(r, n)$ il numero di Arnold, ossia il numero delle r-ple $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ di numeri interi positivi e minori di n, tali che

$$\frac{1}{2}n(r-2) + 1 < \sum_{i=1}^{r} k_i \leq \frac{1}{2}rn. \tag{6}$$

Allora, per il numero $\mu(n, r)$ dei punti doppi di una ipersuperficie di $\mathbb{P}^r$ si ha:

$$d(n, r) \leq A(n, r).$$

Per $r = 3$ la (6), che diviene:

$$\frac{1}{2}n + 1 < \sum_{i=1}^{3} k_i \leq \frac{3}{2}n,$$

fornisce per il numero dei punti doppi di una superficie d'ordine n di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ le seguenti maggiorazioni:

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mu(n,3) \leq$	4	16	31	68	104	180	246	372	...

Per $n = 3$ la (6) diviene:

$$\frac{3}{2}r - 2 < \sum_{i=1}^{r} k_i \leq \frac{3}{2}r, \qquad \begin{cases} 1 \leq k_i \leq 2 \\ r \leq \sum k_i \leq 2r \end{cases} .$$

Il numero dei punti doppi di una forma cubica di $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ non può dunque superare il numero dei punti di $\mathbb{P}^{r-1}$ le cui coordinate omogenee son tutte uguali ad 1 oppure a 2 ed hanno somma compresa tra r e $2r$; e ciò implica che il numero delle coordinate uguali a 2 può solo essere ϱ oppure $\varrho - 1$ essendo ϱ la parte intera di $\frac{r}{2}$. Pertanto: $\mu(r,3) \leq \binom{r}{\varrho} + \binom{r}{\varrho-1} = \binom{r+1}{\varrho}$. È facile vedere che *questo limite è raggiunto per ogni* r. [6]

2.5. Ed ecco infine la disuguaglianza di Y. Miyaoka [52], [53]:

Teorema 2.4. *Se d è il numero di nodi di una superfcie di ordine n di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, allora*

$$d \leq \frac{4}{9}n(n-1)^2. \tag{7}$$

In particolare si hanno i confini

$n =$	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$d \leq$	35	66	112	174	256	360	488	645	...

La (7) fornisce a tutt'oggi la migliore valutazione asintotica per $\mu(n)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{n^3} \leq \frac{4}{9}.$$

Dopo aver dimostrato (sfruttando un'idea di Enriques e Bogomolov) la disuguaglianza $3c_2 \geq c_1^2$, ove c_1, c_2 sono le classi di Chern di X (ossia del fibrato tangente), Miayoka prova che una superficie minimale con dimensione di Kodaira ≥ 0 non può possedere più di $\frac{2}{3}(c_2 - \frac{1}{3}c_1^2)$ curve razionali non singolari disgiunte[7]. Ciò implica che

$$d \leq \frac{2}{3}\big[c_2(X) - \frac{1}{3}c_1^2(X)\big]. \tag{8}$$

[6] Nel piano una curva del terzo ordine con tre nodi è una terna di rette; in $\mathbb{P}^3$ c'è la superficie di Cayley [16] con 4 nodi; in $\mathbb{P}^4$ c'è la forma cubica di C. Segre [74] con 10 nodi; in $\mathbb{P}^5$ conosciamo varie ipersuperficie cubiche proiettivamente distinte con 15 punti doppi [97], [92], [75] .

Una ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^r$ con $\mu(3,r)$ nodi si può ottenere come sezione di una forma cubica non singolare di $\mathbb{P}^{r+1}$ con un iperpiano Π ad essa tangente in $\binom{r+1}{\varrho}$ punti distinti. Ad esempio possiamo prendere l'iperpiano Π di equazione $\sum_0^{r+1} x_i = 0$ e la forma cubica Φ di equazione $\lambda x_0^3 + \sum_{j=1}^{r+1} x_i^3 = 0$ ($\lambda = 1$ oppure $\lambda = \frac{1}{4}$ a seconda che r sia pari oppure dispari). Per avere i punti di contatto basta cercare i punti $P(y_0, \ldots, y_{r+1})$ che hanno Π come iperpiano polare rispetto a Φ, e cercare quali tra questi punti appartengono a Π.

[7] La stessa disuguaglianza è stata anche ottenua da S. T. Yau [100].

Ora $c_1^2(X)$ è il grado del sistema canonico; quindi $c_1^2 = n(n-4)^2$ e per la formula di Noether: $c_2 + c_1^2 = 12(p_a + 1)$ si trova $c_2 = \binom{n-1}{3} + 12 - n(n-4)^2$; e quindi la (7).

Ecco un riassunto delle limitazioni oggi note per per il massimo numero di nodi di una $\mathcal{F}^n$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ d'ordine $n \leq 12$:

	5	6	7	8	9	10	11	12
Basset (1906)	34	66	114	181	270	383	524	694
Bruce (1981)	32	73	108	193	256	401	500	721
Givental (1983)	31	68	104	171	253	362	495	667
Varchenko (1983)	31	68	104	180	246	372	480	664
Miyaoka (1984)	35	66	112	174	256	360	488	645

3 Esempi di superficie con molti punti singolari isolati

3.1 Le superficie monoidi.

Siano $F \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ un monoide d'ordine n ed O il suo punto $(n-1)$-plo. In un sistema di coordinate affini aventi O come origine, l'equazione di F ha la forma $A(x,y,z) + B(x,y,z) = 0$, A e B essendo due polinomi omogenei di gradi rispettivi $n-1$ ed n. Si vede facilmente che

- condizione necessaria e sufficiente affinché F abbia un punto doppio P è che i due coni $A = 0$ e $B = 0$ si tocchino lungo la retta OP;
- se F possiede due punti doppi allineati con O, la retta che li contiene è doppia per F.

Il problema della determinazione del massimo numero di punti doppi che il monoide F possa possedere [distinti dal punto $(n-1)$-plo] diviene quindi una questione di bisezione della serie lineare $g_{n(n-1)}$ staccata su di una curva piana A di ordine $n-1$ dalle curve B di ordine n. La teoria di Abel-Jacobi-Hurwitz assicura che una g_N^R sopra una curva di genere p è divisibile per q se $N \geq pq$. Ciò significa che, se $N \geq pq$ la serie g_N^R è multipla secondo q di una serie lineare g' di ordine $\mu = \frac{N}{q}$, nel senso che ogni gruppo di g' contato q volte dà un gruppo di g_N^R.

Nel caso che ci interessa: $N = n(n-1)$, $q = 2$, $p \leq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ (sicché $N > pq$) la bisezione è certamente possibile e quindi: *il massimo numero di nodi per un monoide d'ordine n è $\frac{1}{2}n(n-1)$.*

Uno studio accurato dei monoidi d'ordine n con il massimo numero $\frac{1}{2}n(n-1)$ di nodi è stato fatto da E. G.Togliatti [90] che ha dimostrato che essi si distribuiscono in due sistemi continui distinti.[8] Il primo sistema ha la dimensione $\frac{1}{2}(n+2)(n+3)$. Il secondo ha la dimensione $\frac{1}{8}(n+3)(5n+1)+3$ quando n è dispari, e $\frac{5}{8}n(n+2)+6$ quando n è pari; nel primo caso i punti doppi son tutti infinitamente vicini al punto $(n-1)$-plo; nel secondo essi stanno tutti sopra una curva piana γ di ordine $\frac{1}{2}n$, situata sopra un piano non passante per il punto $(n-1)$-plo e tangente alla superficie lungo γ.

[8] Questo fatto era già stato rilevato da K. Rohn [60] fin dal 1884, a proposito dei monoidi del quatr'ordine che si distribuiscono in due sistemi continui tra i quali non si può comunicare se non passando attroverso una $\mathcal{F}^4$ ridotta ad un cono quadrico da contar due volte.

3.2 Superficie della forma $\alpha x_0^{2m} - 2\beta x_0^m + \gamma = 0$

3.1. Ora e nel seguito useremo lo stesso simbolo per indicare una ipersuperficie algebrica di $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ ed una forma algebrica nelle coordinate proiettive ed omogenee di punto $x_0, x_1, \ldots, x_r$ il cui annullarsi ne fornisca l'equazione; sicché diremo indifferentemente ipersuperficie F od ipersuperficie di equazione $F = 0$. Se F è un cono di vertice il punto $A_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ indicheremo con F anche la sua sezione con l'iperpiano $x_0 = 0$.

Ciò premesso siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ tre polinomi omogenei di gradi rispettivamente $m, m+i, 2m+i$. Posto:

$$f = \alpha x_0^{2m} - 2\beta x_0^m + \gamma \tag{9}$$

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma, \qquad \vartheta = \frac{\partial f}{\partial x_0}$$

consideriamo l'ipersuperficie f che ha ordine $2m+i$ e per la quale il punto A_0 è multiplo di molteplicità i. Relativamente ad essa si ha che:

Proposizione 3.1. (v.[27], [28]): a) *Se $P \neq A_0$ è punto doppio per f e non appartiene all'iperpiano x_0 né al cono β la retta A_0P è generatrice doppia del cono Δ;*

b) *Se la retta A_0P con $P = (0, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ è generatrice doppia di Δ e non appartiene al cono β - e quindi neppure al cono α - gli m punti $P_k(\lambda_k, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono le radici m-esime di $\frac{\beta(a_1,a_2,\ldots,a_r)}{\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_r)}(\neq 0)$, son tutti doppi (in generale nodi)* per f.

Dimostrazione: ovvia conseguenza dell'identità di immediata verifica:

$$4m^2 x_0^{2m-2}(\alpha f + \Delta) = \vartheta^2. \tag{10}$$

Per ottenere ipersuperficie della forma $\alpha x_0^{2m} - 2\beta x_0^m + \gamma = 0$ che abbiano molti punti doppi isolati, basterà scegliere α, β, γ in modo tale che il cono Δ abbia molte generatrici doppie isolate; e che inoltre, se $m \geq 2$, sia dotato di molte generatrici doppie isolate anche il cono γ.

Ecco alcuni esempi in $\mathbb{P}^3$.

a) nel piano $x_0 = 0$ consideriamo due rette α, ε ed una curva β di ordine $m+1$ che incontri α in $m+1$ punti distinti $R_1, R_2, \ldots, R_{m+1}$ ed ε in altrettanti punti distinti $S_1, S_2, \ldots, S_{m+1}$. Sia poi γ_i $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ una conica tangente ad α in R_i e ad ε in S_i. Le curve del fascio $\beta^2 - \lambda\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m+1} = 0$ segano tutte su α lo stesso divisore $2\sum R_i$ e su ε lo stesso divisore $2\sum S_i$ e quindi c'è un valore di λ (che possiamo supporre =1) tale che si abbia una identità del tipo:

$$\beta^2 - \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m+1} = \alpha\varepsilon\Theta$$

con Θ polinomio omogeneo di grado $2m$. La superficie Φ, di ordine $2m+1$ data in $\mathbb{P}^3$ dall'equazione:

$$\alpha x_0^{2m} - 2\beta x_0^m + \varepsilon\Theta = 0$$

possiede $4m\binom{m+1}{2}$ punti doppi isolati non appartenenti al piano piano $x_0 = 0$. Se $m \geq 2$, F possiede altri $2m$ punti doppi sul piano $x_0 = 0$. Se $m \geq 3$ questi $2m$ punti sono biplanari. Abbiamo così trovato una F^3 con 4 nodi, una F^5 con 28 nodi, una F^7 con 78 punti doppi (72 nodi e 6 punti biplanari), una F^9 con 168 punti doppi, ...

Si può notare che come β si può prendere una qualunque curva della forma: $l_1 l_2 \ldots l_{m+1} + \alpha\varepsilon\xi = 0$ ove l_i è la retta $R_i S_i$ e ξ è un arbitario polinomio omogeneo di grado $m-1$. Scegliendo in modo opportuno i polinomi $\alpha, \varepsilon, l_i, \xi, \gamma_j$ si può tentare di imporre singolarità alla curva Θ. È ciò che ha fatto Stagnaro nel caso $m = 2$ ottenendo in [79] una F^5 con 31 nodi ed una F^7 con 90 punti doppi di cui 18 biplanari.

È probabile che la F^5 di Stagnaro non sia proiettivamente identica a quella di Togliatti, ma non sembra facile provarlo.

b) Nel piano $x_0 = 0$ consideriamo una conica α ed una curva β di ordine $m+2$ che seghi α in $2m+4$ punti distinti P_i; e sia d_i $(i = 1, 2, \ldots, 2m+4)$ la retta tangente ad α_i in P_i. Poiché tutte le curve del fascio $\beta^2 - \lambda d_1 d_2 \ldots d_{2m+4} = 0$ segano su α lo stesso divisore $2\sum P_j$ si ha un'identità della forma $\beta^2 - \alpha\gamma = d_1 d_2 \ldots d_{2m-4}$ e quindi una F^{2m+2} che possiede $1 + m\binom{2m+4}{2}$ punti doppi isolati. In particolare: una F^4 con 16 nodi, una F^6 con 57 nodi ed una F^8 che ne ha 136. Ma si dispone di molti parametri per tentare di aggiungere nuovi punti doppi appartenenti al piano $x_0 = 0$. Stagnaro ha costruito in tal modo una F^6 con 64 nodi.

c) Vediamo ora alcuni esempi di superficie della forma (9) che posseggono punti doppi e punti tripli. L'identità (10) mostra che un punto P della cubica ellittica α che sia triplo per F (e quindi doppio per $\frac{\partial f}{\partial x_0}$) è punto quadruplo di Δ.

È facile provare che (v. [28]):

Proposizione 3.2. *Una retta g comune ai due coni α, β e che sia generatrice semplice per β e quadrupla per Δ contiene m punti tripli di F, distinti tra loro e dal punto $A_0(1, 0, \ldots, 0)$. Inoltre i due coni α e β si toccano lungo g.*

Per ottenere una superficie F^{2m+i} con un punto i-plo ed inoltre "molti" punti tripli ulteriori e "molti" punti doppi, dobbiamo costruire una curva $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma$, di ordine $2(m+i)$, la quale possegga "molti" punti quadrupli M in punti della curva α e "molti" punti doppi N fuori di α scelti in modo che Δ e β^2 seghino su α lo stesso divisore $4\sum M_i + 2\sum N_j$. Ricorrendo all'integrale ellittico appartenente ad α non è difficile, anche se alquanto laborioso, cercare tra tutti i possibili spezzamenti di Δ in curve razionali quello per cui Δ abbia il massimo numero possibile di punti quadrupli appartenenti ad α e di nodi non appartenenti ad α; e anche γ (se $m \geq 2$) abbia il massimo numero possibile di nodi.-

Ad esempio (se $m = 1$) si vede che una F^5 non può possedere più di cinque punti tripli e se $\lambda(p)$ è il massimo numero di punti doppi per una F^5 che già possegga p punti tripli si ha: $\lambda(0) = 31$, $\lambda(1) = 24$, $\lambda(2) = 20$, $\lambda(3) = 16$, $\lambda(4) = 4$, $\lambda(5) = 0$. Una F^5 con cinque punti tripli si può ottenere come trasformata di un cono cubico ellittico Γ mediante il sitema lineare delle superficie del terz'ordine aventi come nodi quattro punti semplici di Γ.

d) In [30] e [19] sono considerate le superficie del sesto ordine di tipo (9) dotate di un punto quadruplo, sicché α, β, γ siano curve di gradi 4,5,6. Premesso che una tal superficie non può avere altri punti di molteplicità ≥ 4 senza esser dotata di linee multiple, si vede che una F^6 con un punto quadruplo può avere al più 6 punti tripli. Infatti una F^6 con un punto quadruplo, t punti tripli e d nodi è la trasformata birazionale di una F^5 con $t-2$ punti tripli, e $d+3$ nodi.

Se $d(q)$ è il massimo numero di nodi per una superficie del sest'ordine con un punto quadruplo e q punti tripli risulta: $d(0) = 45$, $d(1) = 35$, $d(2) = 30$, $d(3) = 21$, $d(4) = 17$, $d(5) = 13$,

$d(6) = 1$. Ciò si ottiene esaminando tutti i possibili spezzamenti di Δ in curve razionali e cercando poi, ricorrendo al principio di equivalenza di Riemann e Weierstrass, quali tra queste configurazioni siano effettivamente possibili[9]; (v. ad esempio [1]).

3.3 La trasformazione razionale $x_i \to x_i^p$

Siano $\mathbb{P}^r$ e $\mathbb{P}'^r$ due spazi priettivi di egual dimensione r e siano $x_0, x_1, \ldots, x_r$ coordinate proiettive ed omogenee in $\mathbb{P}^r$ ed $y_0, y_1, \ldots, y_r$ coordinate proiettive ed omogenee in $\mathbb{P}'^r$. Denoteremo con $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ i relativi $(r+1)$-edri di riferimento e con A_i, A'_i i loro vertici. Sia poi $\omega_p : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}'^r$ la trasformazione razionale definita dalle equazioni: $y_i = x_i^p \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$. La controimmagine $= \omega^{-1}(V')$ della ipersuperficie V' di $\mathbb{P}'^r$ di equazione $f(y_0, y_1, \ldots, y_r) = 0$ ha equazione $f(x_0^p, x_1^p, \ldots, x_r^p) = 0$. Ciò premesso si ha la seguente

Proposizione 3.3. (v. [29])

a) *Se il vertice A'_i di $\mathcal{T}'$ è punto s-plo isolato per V', A_i risulta sp-plo isolato per V.*

b) *Se P' è un punto di $\mathbb{P}'^r$ non appartenente ad alcuna delle facce di $\mathcal{T}'$ ed s-plo isolato per V' la fibra $\omega_p^{-1}(P')$ è costituita da p^r punti distinti, non appartenenti ad alcuna delle facce di $\mathcal{T}$ e tutti s-pli isolati per V;*

c) *per quanto riguarda i punti appartenenti a qualche faccia di $\mathcal{T}'$, possono presentarsi vari casi. Ad esempio, se la faccia $A'_{i_0} A'_{i_1} \ldots A'_{i_k}$ sega V' in una varietà che possiede un punto doppio (oppure triplo) in un punto P' semplice di V' e non appartenente a facce di dimensione inferiore, la fibra $\omega_p^{-1}(P')$ è costituita da p^k punti distinti tutti doppi per V (oppure almeno doppi e tripli se $p > 2$ per V), appartenenti alla faccia $A_{i_0} A_{i_1} \ldots A_{i_k}$ di $\mathcal{T}$, ma non a facce di minor dimensione.*

La dimostrazione è un semplice esercizio.

In particolare, se V' è una superficie di $\mathbb{P}'^3$ avente come sole singolarità t_0 nodi e se il tetraedro $\mathcal{T}'$ è scelto in modo che questi t_0 punti abbiano tutte le coordinate non nulle, e se inoltre vi sono t_1 punti con tre coordinate non nulle nei quali V' è tangente a facce di $\mathcal{T}$, t_2 punti con due coordinate non nulle nei quali V' è tangente a spigoli di $\mathcal{T}'$ e t_3 vertici di $\mathcal{T}'$ appartenenti a V', la superficie $V = \omega_p^{-1}(V')$ possiede $t_0 p^3 + t_1 p^2 + t_2 p + t_3$ punti singolari isolati; t_3 tra questi sono punti p-pli; tutti gli altri sono (in generale) doppi.

Ecco alcuni esempi:

a) Se $f(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$ è una quadrica tangente ai quattro piani $y_i = 0$ in punti con tre coordinate con nulle, $f(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0$ è una superficie di Kummer del tipo particolare considerato da A. Cayley (e detta *tetraedroide di Cayley*).

b) Cosideriamo una superficie $\mathcal{F}^4$ di Kummer ed un suo piano tangente π. La sezione $\mathcal{C}$ di $\mathcal{F}^4$ con π è una quartica di genere 2 la quale ammette qualche triangolo in pari tempo inscritto e circoscritto. Scegliendo per ciascun lato di un siffatto triangolo un piano che sia tangente ad $\mathcal{F}^4$ in un punto non appartenente al lato stesso, si ottengono tre piani che insieme a π formano un tetraedro $\mathcal{T}$ le cui facce sono quattro piani di $\mathcal{F}^4$ ed avente tre spigoli tangenti ad

[9] Se $q \geq 3$ per ottenere $\mathcal{F}^6$ con un punto quadruplo e $d(q)$ punti doppi si può più semplicemente osservare che esse sono trasformate birazionali di superficie del quinto ordine con $q - 3$ punti tripli e con il massimo numero possibile di punti doppi.

$\mathcal{F}^4$ e tre vertici in punti semplici di $\mathcal{F}^4$. La trasformazione $x_i \to x_i^2$ muta $\mathcal{F}^4$ in una $\mathcal{F}^8$ avente $16 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 = 153$ nodi. Questo esempio è di B. Segre [72].

c) Un'altra superficie di notevole interesse si ottiene a partire da una superficie cubica generale $f(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$. Se le quattro facce di $\mathcal{T}'$ sono tangenti alla superficie in punti di Eckardt, la superficie del nono ordine $f(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3) = 0$ possiede 36 punti tripli. Su ciascuna delle quattro facce di $\mathcal{T}$ ne giacciono 9 i quali sono i punti base di un fascio di cubiche. (v.[29]). Con lo stesso metodo E. Stagnaro [81] ha costruito una F^9 con 39 punti tripli [10].

Esempi analoghi si hanno in spazi di dimensione r qualunque. Così partendo da una quadrica non specializzata tangente alle $r+1$ facce di T' si perviene ad una ipersuperficie del quarto ordine che possiede $2^{r-1}(r+1)$ punti doppi. [Ci sarà utile, tra poco, la forma quartica dello spazio a quattro dimensioni dotata di 40 nodi.] Se invece si parte da una forma cubica di $\mathbb{P}^r$ tangente alle $r+1$ facce di T' in punti di Eckardt, si trova una ipersuperficie del nono ordine la quale possiede $3^{r-1}(r+1)$ punti tripli.

3.4 Contorni apparenti di ipersuperficie di $\mathbb{P}^r$

3.2. Consideriamo in $\mathbb{P}^4$, ove x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 siano coordinate proiettive omogenee di punto, una ipersuperficie Φ, d'ordine $2m+i$, avente equazione $\alpha x_0^{2m} - 2\beta x_0^m + \gamma = 0$ la quale possegga d^* punti doppi distinti dal punto $A_0(1, 0, \dots, 0)$ e non appartenenti all'iperpiano $x_0 = 0$ né al cono β. Sappiamo (v. prop. 3.1) che questi punti sono allineati m ad m sopra generatrici doppie del cono Δ di equazione $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$; ed in generale nessuna di queste rette ne contiene più di m. Poiché Δ possiede anche $i(m+i)(2m+i)$ rette doppie date dalle equazioni $\alpha = \beta = \gamma = 0$, la superficie F di $\mathbb{P}^3$, di ordine $2(m+i)$, rappresentata dall'equazione $\Delta = 0$, possiede

$$d = \frac{d^*}{m} + i(m+i)(2m+i)$$

punti doppi.

In particolatre, se $m = 1$, sicché Φ abbia in A_0 un punto di molteplicità i ed α, β, γ abbiano gradi rispettivamente $i, i+1, 2i+1$, e se nessuna retta uscente da A_0 contiene più di un punto distinto da A_0 e doppio per Φ, si trova in $\mathbb{P}^3$ una superficie di ordine $2i+2$ con $d^* + i(i+1)(i+2)$ punti doppi, in generale tutti conici.

Vediamo alcuni esempi.

a) (*La superficie di Kummer*) Nello spazio a quattro dimensioni consideriamo una forma cubica Φ avente il massimo numero possibile di punti doppi, e cioè 10 punti doppi [9][11] , e

[10] La miglior limitazione ora conosciuta per il numero $h(9)$ di punti tripli di una $\mathcal{F}^9$ è $h \leq 42$ (v. Y. Miyaoka [53]). Del problema del massimo numero $h(n)$ di punti tripli isolati per una F^n di $\mathbb{P}^3$ si sono occupati recentemente S. Endrass, U. Persson e J. Stevens [25], [86] con speciale riguardo alle superficie del sesto ordine. A tutt'oggi sappiamo soltanto che $d(5) = 5$ [28] e $d(6) = 10$ [86]. Una completa classificazione delle F^5 con punti tripli si fa, come abbiamo visto, ricorrendo alla solita rappresentazione di una cubica piana mediante la $\wp$ di Weierstrass; mentre lo studio delle F^6 con 9 punti tripli si fa agevolmente in quanto 9 punti appartengono ad almeno una quadrica, meno semplice è classificare le F^6 con 10 punti tripli; ciò ha fatto J. Stevens in [86] riducendo la questione (come Beauville per le F^5) allo studio delle curve eccezionali sopra una risoluzione minimale di F^6.

[11] Per provare che una ipersuperficie cubica Φ di $\mathbb{P}^4$ non può avere più di 10 punti doppi basta scrivere che la classe di Φ è almeno 3.

scegliamo il pentaedro di riferimento in modo che Φ abbia equazione $\alpha x_0^2 - 2\beta x_0 + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ forme di gradi rispettivi 1, 2, 3, e del resto generiche.

La superficie di equazione $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = 0$ possiede $10 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 16$ nodi, ed è quindi una superficie di Kummer.

b) (*La superficie di Togliatti*) Nello spazio $\mathbb{P}^r$ consideriamo una ipersuperficie algebrica V, di ordine $n \geq 3$, la quale possegga una retta a di molteplicità $n-2$. Supponiamo che le equazioni di a siano $x_0 = x_1 = \ldots = x_{r-2} = 0$ e che quindi l'equazione di V sia della forma:

$$\sum \alpha_i(x_0, x_1, \ldots, x_{r-2})\beta_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 \tag{11}$$

con α_i forme di grado $n-2$ nelle sole indeterminate $x_0, x_1, \ldots, x_{r-2}$ e β_i forme quadratiche.

Nello S_{r-2}: $x_{r-1} = x_r = 0$ prendiamo un punto $P(y_0, y_1, \ldots, y_{r-2}, 0, 0)$, ed il piano $\pi = aP$. Il generico punto di π ha coordinate $(y_0, y_1, \ldots, y_{r-2}, \lambda, \mu)$, e λ, μ possono essere riguardate come coordinate non omogenee in π.

La sezione di π con V è una curva di ordine n dalla quale si stacca la retta a contata $n-2$ volte. Resta una conica γ che in π è data dall'equazione $f(\lambda, \mu) = 0$ ove:

$$f(\lambda, \mu) = \sum \alpha_i(y_0, y_1, \ldots, y_{r-2})\beta_i(y_0, y_1, \ldots, y_{r-2}, \lambda, \mu).$$

Se γ si spezza in due rette, π è tangente a V oppure contiene un punto doppio di V.

I coefficienti dei termini di grado k $(k = 0, 1, 2)$ del polinomio $f(\lambda, \mu)$ sono forme di grado $n-k$ nelle indeterminate $y_0, y_1, \ldots, y_{r-2}$; eppertanto il luogo dei punti P di S_{r-2} - e cioè il contorno apparente Φ di V sull'S_{r-2} dalla retta a - è una ipersuperficie di ordine $3n-4$ (di S_{r-2}) la cui equazione si ottiene annullando un polinomio della forma:

$$\Phi = \det \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

con A, B, C, D, E, F polinomi omogenei di gradi $n-2, n-2, n-2, n-1, n-1, n$.

Si vece facilmente che, se Q è un punto doppio di V, la traccia sull'S_{r-2} del piano aQ è un punto doppio di Φ. Per provarlo, supponiamo che Q sia il punto $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ e cioè supponiamo che nell'equazione (11) la x_0 compaia al grado massimo $n-2$. I coefficienti di $f(\lambda, \mu)$ conterranno y_0 al grado massimo $n-2$ e quindi y_0 comparirà in Φ al grado massimo $3n-6$; ciò basta per concludere.

Poiché sussiste l'identità:

$$A\Phi = (AC - B^2)(AF - D^2) - (AE - BD)^2$$

l'ipersuperficie Φ è circoscritta alla ipersuperficie di ordine $2(n-2)$ di equazione: $AC - B^2 = 0$; e poiché questa ha una varietà doppia di dimensione $r-5$ ed ordine $(n-2)^3$, di equazioni $A = B = C = 0$, sulla varietà di contatto W - che ha dimensione $r-4$ ed il cui ideale è generato dai minori di secondo ordine della matrice $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{pmatrix}$ - l'ipersuperficie Φ possiede una varietà doppia di ordine $(n-2)^3 + n(n-2)(3n-4)$ e dimensione $r-5$. (v. [34], [12]).

Sia ora $r = 5$ e supponiamo che V possegga d^* punti doppi isolati; in tal caso Φ è una superficie di $\mathbb{P}^3$ avente ordine $3n - 4$ e dotata di $d = (n-2)^3 + n(n-2)(3n-4) + d^*$ nodi.

In particolare, se V è una forma cubica dotata di 15 punti doppi - e cioè del massimo numero di punti doppi isolati che si possano imporre ad una ipersuperficie del quinto ordine dello spazio proiettivo a cinque dimensioni [92],[93], Φ è una superficie del quinto ordine di $\mathbb{P}^3$ avente 31 nodi. È questa la superficie di Togliatti.

c) (*Una F^6 con 63 nodi*) In $\mathbb{P}^4$ consideriamo una quadrica Q non specializzata ed un pentaedro $\mathcal{T}$ le cui facce siano cinque iperpiani tangenti di Q. Se $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ è l'equazione di Q rispetto a $\mathcal{T}$, l'ipersuperficie Φ del quarto ordine $f(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2) = 0$ possiede $5 \cdot 2^3 = 40$ punti doppi.

Riferiamo ora i punti di $\mathbb{P}^4$ ad un nuovo pentaedro $\mathcal{T}^* = (B_0, B_1, B_2, B_3, B_4)$ scelto in modo tale che B_0 sia uno dei 40 punti doppi di Φ e che gli altri 39 punti doppi diano, congiunti con B_0, 39 rette distinte. Con questa scelta del riferimento l'equazione di Φ sarà della forma $\alpha x_0^2 - 2\beta x_0 + \gamma = 0$ con α, β, γ forme quaternarie di gradi 2, 3, 4 e la F^6 data in $\mathbb{P}^3$ dall'equazione $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ ha $39 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 63$ punti doppi.

d) (*Una F^8 con 160 nodi*) Un notevole esempio di superficie dell'ottavo ordine si ottiene nel modo seguente [33].

Nello spazio proiettivo a nove dimensioni consideriamo una ipersuperficie V di ordine ≥ 3 ed un suo punto P generico. Le rette che passano per P e che presentano ivi contatto di secondo ordine con V sono le generatrici di un cono quadrico Δ_7^2 situato nell'iperpiano tangente a V in P. Questo cono, la cui generica sezione iperpiana è una quadrica non specializzata di $\mathbb{P}^7$, contiene, come spazi massimi, ∞^6 spazi a quattro dimensioni e la sezione di ciascuno di questi con V ha P come punto triplo.

Esistono dunque ∞^6 spazi S_4 passanti per P e seganti V in una ipersuperficie avente P come punto triplo.

Ciò premesso, siano $x_1, x_2, \ldots, x_5; y_1, y_2, \ldots, y_5$ coordinate proiettive ed omogenee in $\mathbb{P}^9$ e consideriamo la V_8^5 di equazione: $x_1 x_2 \ldots x_5 = y_1 y_2 \ldots y_5$. Ogni spazio del tipo $x_i = x_j = y_l = y_k = 0$ è doppio per V_8^5; e quindi V_8^5 possiede 100 spazi doppi cinquedimensionali ed è segata da un qualsiasi S_4 in una ipersuperficie Φ del quinto ordine che possiede 100 punti doppi. Se l'S_4 è scelto in modo che Φ possegga un punto triplo (ossia se l'S_4 è uno degli spazi massimi di Δ_7^2) la sua sezione con V_8^5 è una V_3^5 che possiede, oltre il punto triplo P, 100 punti doppi nelle intersezioni dell'S_4 con i cento S_5 doppi di V_8^5.

Si trova dunque in S_4 una ipersuperficie di tipo $x_0^2\alpha - 2x_0\beta + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ forme quaternarie di gradi 3, 4, 5.

La superficie $\mathcal{F}^8$ di $\mathbb{P}^3$ di equazione $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ possiede $100 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 160$ *punti doppi isolati.*

In [33] è dimostrato che da un punto generico di Φ i 100 punti doppi di Φ son proiettati secondo 100 rette distinte.

3.5 Le superficie di Kreiss

Consideriamo in $\mathbb{P}^3$ una rete Σ di superficie d'ordine n, avente n^3 punti base distinti. Se f_0, f_1, f_2 sono tre sue superficie linearmente indipendenti, aggiungiamo ad esse $N - 3$ $[N = \binom{2n+3}{3}]$

superficie $f_4, \ldots$ in modo da formare una base per il sistema lineare $\Sigma\ \infty^{N-1}$ di tutte le superficie d'ordine n.

Insieme a Σ consideriamo il sistema lineare 2Σ : $\sum_{i=0}^{N} a_{ik} f_i f_k = 0$ e la sua immagine proiettiva Φ_3, per la quale si ha la rappresentazione parametrica $x_{ik} = f_i f_k \quad (i, k = 0, 1, \ldots, N)$.

Alle superficie di Σ corrispondono superficie di contatto di Φ_3 con iperpiani di $\mathbb{P}^N$, ed al sistema lineare ∞^5 : $\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} f_i f_k = 0$, $[(a_{i,k})$ matrice simmetrica ad elementi $\in \mathbb{C}]$ delle *superficie sizigetiche* corrisponde il sistema lineare ∞^5 delle sezioni iperpiane di Φ_3 che passano per lo spazio T (di dimensione $N-6$) rappresentato dalle equazioni $x_{00} = x_{01} = x_{02} = x_{11} = x_{12} = x_{22} = 0$.

Se π è la proiezione da T sullo spazio S_5 che congiunge i sei punti $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{22}$, si vede subito che:

- la proiezione di Φ_3 è una superficie di Veronese $\mathcal{F}^4$; ciò comporta che gli spazi tangenti a Φ_3 siano tutti appoggiati a T (generalmente in un sol punto);[12]
- le superficie sizigetiche hanno come proiezioni le $\mathcal{C}^4$ sezioni iperpiane di $\mathcal{F}^4$;
- le superficie di Σ (i cui doppi sono superficie sizigetiche) vengon proiettate nelle coniche di $\mathcal{F}^4$;
- *le curve caratteristiche di* σ (curve base di fasci di superficie di σ) hanno come proiezioni i singoli punti di $\mathcal{F}^4$ (punti base di fasci di coniche)[13].

Ad una superficie di 2Σ che abbia un punto doppio corrisponde in $\mathbb{P}^N$ una sezione iperpiana di Φ_3 avente un punto doppio, cioè la sezione di Φ_3 con un iperpiano (passante per T) ad essa tangente, e quindi contenente uno spazio tangente di Φ_3.

3.3. Per comodità di linguaggio e di notazioni, userò lo stesso simbolo e lo stesso nome per indicare un punto, una linea, una superficie di S_3 e la sua immagine in $\mathbb{P}^N$. E così ad esempio, diremo che la sezione di Φ con un iperpiano passante per T è una superficie sizigetica relativa alla rete Σ. E dirò *proiezione* per significare la *proiezione da T su S*.

Proposizione 3.4. *I punti doppi per una superficie $\mathcal{F}^n$ di Σ, ma non punti base della rete, che appartengano ad una medesima curva caratteristica $\mathcal{L}$* (e che abbiano quindi in S la stessa proiezione P') *sono punti doppi di ogni superficie sizigetica la cui proiezione in S sia tangente (in P') alla conica γ proiezione di $\mathcal{F}^n$.*

Per la dimostrazione v. [44].

Si possono allora ottenere superficie algebriche con molti nodi partendo da un rete Σ con "molte" curve caratteristiche contenenti ciascuna "molti" punti doppi di $\mathcal{F}^n$.

Ciò premesso, siano f_0 una superficie di Σ e γ la sua proiezione.

Supponiamo che f_0 abbia qualche retta doppia g. Una curva caratteristica ξ di f_0 (segata su f_0 da una superficie del fascio $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$) interseca g in n punti D che son tutti doppi

[12] Infatti il cono che proietta Φ_3 da T ha dimensione soltanto $N-3$, invece che $N-2$ come avviene per un generico spazio di dimensione $N-6$ (v. [36]).

[13] Non si dimentichi che due coniche della supericie di Veronese hanno un sol punto a comune.

per f_0. La proiezione P_0 di ξ è un punto della conica γ_0 proiezione di f_0; pertanto una sezione iperpiana di $\mathcal{F}^4$ *che sia tangente in* P_0 *a* γ_0 è la proiezione di una superficie sizigetica $\mathcal{F}^{2n}$ per la quale gli n punti D son doppi. E ciò per ogni retta doppia di f_0. Se $f_0 = A_1A_2\dots A_n$ è una n-pla di piani, su ciascuna delle sue $\binom{n}{2}$ rette doppie ci sono n punti doppi di $\mathcal{F}^{2n}$.

Supponiamo che anche f_1 ed f_2 siano n-ple di piani, sicché l'equazione di Σ sia:

$$\lambda_0 A_1A_2\dots A_n + \lambda_1 B_1B_2\dots B_n + \lambda_2 C_1C_2\dots C_n = 0.$$

Se $\mathcal{C}^4$ è una delle ∞^2 quartiche tangenti alle tre coniche γ_0, γ_1, γ_2 [14] proiezioni di f_0, f_1, f_2, la corrispondente $\mathcal{F}^{2n}$ avrà $3n\binom{n}{2} = \frac{3}{2}n^2(n-1)$ nodi, oltre agli n^3 punti base di Σ. Se poi Σ contenesse una quarta n-pla di piani, avremmo superficie di ordine $2n$ con $n^3+4n\binom{n}{2} = 3n^3-2n^2$ nodi. Ma supporre l'esistenza di una rete di superficie d'ordine n contenente quattro n-ple di piani significa supporre che si abbia una identità della forma:

$$E_{11}E_{12}\dots E_{1n} + E_{21}E_{22}\dots E_{2n} + E_{31}E_{32}\dots E_{3n} + E_{41}E_{42}\dots E_{4n} \equiv 0, \tag{12}$$

ove $E_{ij} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ sono forme lineari. Il primo membro della (12) è un polinomio omogeneo di grado n che dipende da $16n$ parametri omogenei (i coefficienti delle forme lineari E_{ij}); pertanto una identità come la (12) è certo possibile se: $16n > \binom{n+3}{3}$; ossia $n \geq 7$.

Abbiamo così *superficie degli ordini 4, 6, 8, 10, 12, 14 aventi rispettivamente 16, 63, 160, 325, 576, 931 nodi.*

Osservazione 3.5. *Notiamo che una rete di superficie di ordine n non può contenere più di quattro n-ple di piani. Una quinta n-pla porterebbe infatti (per* $n = 4$*) ad una* F^8 *con 184 nodi, mentre sappiamo che* $\mu(8) \leq 171$.

3.6 Le superficie di Chmutov

3.4. Siano $T_n(x)$ i polinomi di Tchebytcheff di prima specie e di ordine n:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad \text{per ogni } x \in [0, 1];$$

ossia

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3 - \dots .$$

Ciò premesso consideriamo la superficie affine $\mathcal{F}^n$ di equazione

$$T_n(x) + T_n(y) + T_n(z) \pm 1. \tag{13}$$

Poiché

$$\frac{dT_n}{dx} = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

[14]Si tenga presente che nella usuale rappresentazione piana di $\mathcal{F}^4$, alle quartiche tangenti a coniche corrispondono coniche di un piano tangenti a rette. E pertanto, date sulla superficie di Veronese $h \geq 5$ coniche ci sono ∞^{5-h} sezioni iperpiane ad esse tangenti.

annullano le tre derivate prime del primo membro della (13) i punti $(\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n}, \cos\frac{k_3\pi}{n})$ $(k_i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Il loro numero è $(n-1)^3$. Ed è facile contare quanti fra questi punti appartengono ad $\mathcal{F}^n$, tenendo presente che

$$T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Si trovano superficie $\mathcal{F}^n$ di ordine n le quali

- *se n è pari* hanno $\frac{3}{8}n^2(n-2)$ oppure $\frac{3}{8}n(n-2)^2$ nodi a seconda che il secondo membro della (13) sia $+1$ oppure -1;
- *se n è dispari hanno $\frac{3}{8}(n-1)^3$ nodi.*

Poiché la parte omogenea di grado n nell'equazione di $\mathcal{F}^n$ è $x^n + y^n + z^n$ non ci sono punti multipli all'infinito.

Per i primi valori di n:

$n =$	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$d =$	24	54	81	144	192	300	375	540	...

Fino al 1984 non erano note superficie di ordine 9 ed 11 con un numero così elevato di punti doppi. Superficie di ordini 10 e 12 con rispettivamente 325 e 576 nodi erano già state costruite da H. O. Kreiss nel 1955.

3.5. Ancora più interessanti gli esempi di Chmutov del 1992; [20]. Si tratta delle superficie affini $\mathcal{F}^n$ di equazione:

$$P_n(x,y) + T_n(z) + 1 = 0$$

ove $T_n(z) = -\frac{1}{4}\cos(n \arccos z) + \frac{1}{4}$ è il polinomio di Chebyshev di prima specie avente valori critici 0 ed $\frac{1}{2}$ e $P_n(x,y)$ è il polinomio che si ottiene scrivendo il polinomio:

$$\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + (\lambda_1\lambda_2)^n + (\lambda_2\lambda_3)^n + (\lambda_3\lambda_3)^n$$

in termini delle funzioni simmetriche elementari

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \qquad \sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

e sostituendovi poi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rispettivamente con $x, y, 1$.

L'espressione esplicita di $P_n(x,y)$ è (cfr. [51])

$$P_n(x,y) = \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2y & x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & y & x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & y & x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ . & . & . & . & 1 & y & x & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & y & x \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y & 1 & 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2x & y & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & x & y & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & y & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ . & . & . & . & 1 & x & y & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}$$

Le due matrici quadrate con cui è formato $P_n(x,y)$ sono $n \times n$; la parte omogenea di grado n di $P_n(x,y)$ è $x^n + y^n$.

La superficie $\mathcal{F}^n$ ha solo punti doppi conici, ed il numero di questi punti è

- $\frac{5n^3-13n^2+12n}{12}$ se $n \equiv 0 \pmod{6}$
- $\frac{5n^3-13n^2+16n-8}{12}$ se $n \equiv 2 \pmod{6}$ oppure $n \equiv 4 \pmod{6}$
- $\frac{5n^3-14n^2+13n-4}{12}$ se $n \equiv 1 \pmod{6}$ oppure $n \equiv 5 \pmod{6}$
- $\frac{5n^3-14n^2+9n}{12}$ se $n \equiv 3 \pmod{6}$

$$[n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots : \quad d = 28, 57, 93, 154, 216, 321, 425, 576, \ldots].$$

3.7 Le superficie di Barth (1994), Endrass (1995), Sarti (1999), Labs (2004)

In una classica Memoria del 1877, dedicata alle superficie dotate di simmetrie, E. Goursat [38] aveva segnalato i seguenti due polinomi, di gradi 6 e 10, invarianti per il gruppo $\mathfrak{G}$ dell'icosaedro:

$$Q = (\tau^2 x^2 - y^2)(\tau^2 y^2 - z^2)(\tau^2 z^2 - x^2), \tag{14}$$

$$R = (x^2 - \tau^4 y^2)(y^2 - \tau^4 z^2)(z^2 - \tau^4 x^2)(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z), \tag{15}$$

ove $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Consideriamo allora la $\mathcal{F}^6$ di equazione

$$Q - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0. \tag{16}$$

Essa possiede 45 nodi (di cui 15 all'infinito) qualunque sia λ, ed un nuovo nodo che si riesca ad imporle disponendo del parametro λ, trascina con sé i punti della sua $\mathfrak{G}$-orbita, che saranno tutti nodi per $\mathcal{F}^6$.

Per $\lambda = \frac{1}{4}(2\tau + 1)$ *si ha la* $\mathcal{F}^6$ *di W. Barth* (1994), *che possiede* $45 + 20 = 65$ *nodi;* e Barth dimostra che non sarebbe possibile aggiungere, con questo procedimento, un ulteriore punto doppio.

Nel 1995 B. Jaffe e D. Ruberman [42] hanno dimostrato (seguendo la via seguita da A. Beauville per le superficie del quinto ordine) che una $\mathcal{F}^6$ non può avere 66 nodi; quindi $\mu(6) = 65$.

La $\mathcal{F}^{10}$ *di Barth* vien cercata nel sistema algebrico

$$R - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2(x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2)^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 1)$$

di superficie dotate di 225 punti doppi (di cui 45 all'infinito). Altri 120 punti doppi vengono imposti con opporuna scelta dei parametri λ e ϱ. In tutto quindi 325 nodi.

Osservazione 3.6. Se omogeneizziamo, il primo membro della (16) diventa una forma cubica di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ nei quadrati delle x_i, pertanto la superficie di Barth può essere ottenuta anche con la trasformazione razionale $x_i \to x_i^2$, in contrasto con [18], ove Catanese e Ceresa avevano erroneamente affermato che una superficie del sesto ordine con 65 nodi non può essere ottenuta da una superficie cubica con tale trasformazione.

Con un procedimento ispirato a quello di W. Barth (ma formalmente più complicato), S. Endrass ha trovato un esempio di superficie dell'ottavo ordine con 168 nodi, appartenente ad una famiglia ∞^{12} di $\mathcal{F}^8$ con 112 nodi, nel modo seguente.

I due polinomi:

$$P = (x_1^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_0^2)\big((x_1 + x_2)^2 - 2x_0^2\big)\big((x_1 - x_2)^2 - 2x_0^2\big)$$

$$\begin{aligned} Q = \big(&a_1(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_2^2)(a_2x_3^2 + a_3x_3x_0 + a_4x_0^2) + \\ &+ a_5x_3^4 + a_6x_3^3x_0 + a_7x_3^2x_0^2 + a_8x_3x_0^3 + a_9x_0^4\big)^2 \end{aligned}$$

sono entrambi invarianti per il gruppo generato dalla rotazione

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_0 \longrightarrow \Big(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} : \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} : x_3 : x_0\Big)$$

e dall'involuzione

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_0 \longrightarrow x_1 : -x_2 : x_3 : x_0 \qquad ;$$

la $\mathcal{F}^8$ di equazione: $P - 4Q^2 = 0$ possiede 112 nodi, per ogni scelta dei parametri a_j. Scegliendo opportunamente questi coefficienti, Endrass riesce ad aggiungere 56 punti doppi ulteriori, sicché (tenendo conto di [37]) si ha: $168 \leq \mu(7) \leq 171$.

A. Sarti [64] si è occupata di fasci di superficie algebriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ che sono invarianti per le traformazioni di sottogruppi del gruppo ortogonale speciale $SO(4)$ che contengono il gruppo di Heisenberg. Di questi fasci ha scritto le equazioni, studiato la varietà base, ed ha calcolato il numero dei punti singolari. Interessante è il fascio di superficie del dodicesimo ordine, che si ottiene combinando linearmente le due forme di grado 12 che sono invarianti per il gruppo bipoliedrico[15] che contiene una *superficie* $\mathcal{F}^{12}$ *avente* 600 *nodi*. Si ha pertanto $\mu(12) \geq 600$; va comunque detto che V. Goryunov ha recentememte fornito la prova dell'esistenza (che aveva già annunciato nel 1996) di una $\mathcal{F}^{12}$ con 600 nodi, anch'essa invariante per il gruppo bipoliedrico.[16]

Infine O. Labs [47] ha trovato una superficie del settimo ordine con 99 nodi. Essa appartiene ad una famiglia Ξ ∞^7 con simmetria diedrale D_7, il cui membro generico possiede 63 nodi. Disponendo dei parametri da cui Ξ dipende, si trova una $\mathcal{F} \in \Xi$ per la quale quindici dei nodi giacciono sul piano $y = 0$ ed uno tra questi anche al piano $x = 0$. I punti delle orbite di questi quindici punti sono tutti e soli i nodi di $\mathcal{F}$. Si trovano in tutto $1 + 14 \cdot 7 = 99$ punti.

[15] Se A_5 è il gruppo delle simmetrie dell' isosaedro (sottogruppo del gruppo ortogonale speciale $SO(2)$), il gruppo bipoliedrico è l'immagine di $A_5 \times A_5$ in $SO(4)$.

[16] La Nota [81] di E. Stagnaro, relativa ad una notevole superficie del dodicesimo ordine con 584 nodi, non è stata pubblicata perché ritirata dall'Autore appena fu a conoscenza di superficie d'ordine 12 con 600 nodi.

Osservazione 3.7. La disuguaglianza di Miyaoka implica che

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu(n)}{n^3}\leq\frac{4}{9};$$

e tra i problemi posti da Miyaoka in [53] c'è quello di vedere se questo limite sia proprio $\frac{4}{9}$. A questo riguardo, consideriamo in $\mathbb{P}^3$ una superficie algebrica d'ordine n_0 $\mathcal{F}^{n_0}$ avente d_0 nodi D_i e riferiamo i punti dello spazio ad un tetraedro le cui facce siano quattro piani bitangenti di $\mathcal{F}^{n_0}$ non contenenti alcuno dei punti D_i (cosa certamente lecita se $n = 10$, $d = 345$).

Se $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ è l'equazione di $\mathcal{F}^{n_0}$, la superficie $\mathcal{F}^{2n_0}$ di equazione $f(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0$ possiede $8d_0 + 32$ nodi; iterando il procedimento si ottiene senza difficoltà

$$\mu(2^m d_0)\geq 2^{3m}d_0+\frac{32}{7}(2^{3m}-1),$$

e quindi:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu(n)}{n^3}\geq\frac{1}{n^3}(d_0+\frac{32}{7}).$$

Ponendo $n_0 = 10$ e $d_0 = 345$ si trova:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu(n)}{n^3}\geq 0,3495714\ldots\qquad(>\frac{4}{9}-\frac{1}{11}).$$

Bibliografia

[1] P. Appel and É. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales,* Paris, Gauthier-Villars, 1895.

[2] V. I. Arnold, S. M. Gusen-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Diffewrentiable Maps,*Vol.II, Birkhäuser, Boston, 1985.

[3] W. P. Barth, *Techno Quintics, Internal Note (1994).*

[4] W. P. Barth, *Two Projective Surfaces with many Nodes, admitting the Symmetries of the Icosahedron,* J. of Algebraic geometry, **5** , No. 1 (1996), pp. 173-176.

[5] A. B. Basset, *The maximum number of double poiyts on a surface,* Nature, 73 (1906), p. 246.

[6] A. B. Basset, *On the singularities of surfaces,* Quart. J., 38, (1907), pp. 63-83.

[7] A. Beauville, *Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans* $\mathbb{P}^3$ ($\mu(5) = 31$), Algebraic Geometry, Angers 1979, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) pp. 207-215.

[8] A. Beauville, *L'application canonique pour les surfaces de type général,* Invent. Math. 55 (1979) no. 2, pp. 121-140.

[9] E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi,* Ediz. Principato, Messina (1923), cap. 8, pp. 206-221.

[10] J. W. Bruce, *An upperbound for the number of singularities on a projective hypersurface,* Bull. of the London Math. Soc. 13, (1981) pp. 47-51.

[11] D. Burns and J. Wall, *Local contribution to global deformations of surfaces,* Inventiones Math., 26 (1974), pp. 67-88.

[12] G. Canonero and M. E. Serpico, *Sulla varietà doppia di una ipersuperficie determinantale,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 42 (1997), no. 3-4, pp. 211-214.

[13] G. Casnati and F. Catanese, *Even sets of nodes are bundle Symmetric,* J. Differential Geometry, 47 (1997), no. 2, pp.237-256.

[14] G. Casnati and F. Catanese, *Even sets of nodes on sextic surfaces,* J. Rur. Math. Soc., 9 (2007) no. 4, pp.705-737.

[15] F. Catanese, *Babbage's conjecture, contact of surfaces, symmetric determinantal varieties and applications,* Inv. Math., 63 (1981), 433-465.

[16] A. Cayley, *A memoir on cubic surfaces,* Trans. London Math. Soc. 159, pp. 231-326 (1869).

[17] A. Cayley, *A thrid memoir on quartic surfaces,* Proc. London Math. Soc. 3, pp. 234-266 (1869).

[18] F. Catanese and G. Ceresa, *Constructing sextic surfaces with a given number d of nodes.* J. Pure Appl. Algebra 23, (1982), pp. 1-12.

[19] N. Chiarli, *Sul massimo numero di punti singolari di una superficie di sest'ordine con un punto quadruplo,* Le Matematiche, vol XXVI, fasc. 2 (1971) pp. 1-10.

[20] S. V. Chmutov, *Examples of projective surfaces with many singularities,* J. Algebraic Geometry I, 1, (1992) pp. 191-196.

[21] G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques,* Genève, 1750, 1175-179.

[22] S. Endrass, *Flächen mit vielen Doppelpunkten,* Mitt. Dtsch. Math. Ver (1995), no. 4, pp. 17-20.

[23] S. Endrass, *A Projective Surface of Degree Eight with 168 Nodes* ,

[24] S. Endrass, *Symmetrische Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten,* Erlangen-Nürenberg. Fak. (1996)

[25] S. Endrass, U. Persson and J. Stevens, *Surfaces with triple points,* J. Algebraic Geometry, 12 (2003), pp. 367-404.

[26] D. Gallarati, *Un'osservazione sul massimo numero di punti doppi delle superficie algebriche,* Atti dell'Accad. Ligure di Scienze e Lettere, vol. VIII (1951) pp. 1-4.

[27] D. Gallarati, *Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati,* Rend. Acc. Naz. dei Lincei (8) 11, (1951) pp. 344-347.

[28] D. Gallarati, *Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli,* Ren. Acc. Naz. Lincei, serie VIII, 12, fasc. 1 (1952), pp. 70-75.

[29] D. Gallarati, *Alcune riflessioni intorno ad una Nota del prof. B. Segre.* , Atti dell'Accad. Ligure di Scienze e Lettere, vol. IX (1952) pp. 106-112.

[30] D. Gallarati, *Una notevole superficie del sesto ordine,* Boll. U. M. I, serie III, Anno VI, n. 3, pp. 213-215.

[31] D. Gallarati, *Intorno ad una superficie del sesto ordine avente 63 nodi,* Boll. U. M.I. (3) 7 (1952), pp. 392-396.

[32] D. Gallarati, *Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi,* Rend. Accad. Naz. dei Lincei (8) 16 (1954), pp. 454-459.

[33] D. Gallarati, *Una superficie dell'ottavo ordine con 160 nodi,* Accad. Ligure di Scienze e Lettere, vo. XIV (1957), pp. 1-7.

[34] D. Gallarati, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve,* Mém. de l'Académie Royale de Belgique, Tome XXXII, fasc. 3 (1960), pp. 1-78.

[35] D. Gallarati, *Sul contatto di superficie algebriche lungo curve,* Annali di matematica (4), 38 (1955), pp. 225-251.

[36] D. Gallarati, *Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati,* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. XX, (1956), pp. 193-199.

[37] A. B. Givental, *On the maximum number of singular points on a projective hypersurface,* Funtional Ann. i Prilozen, 17 (1983) no.3, pp. 73-74.

[38] E. Goursat, *Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier,* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (3) 4, (1887), pp. 159-200.

[39] T. R. Hollcroft, *Singularities of curves of given order,* Bull. Amer. Math. Soc., 29 (1927), pp. 407-414.

[40] T. R. Hollcroft, *Limits for double points of surfaces,* Bull. Amer. Math. Soc., 33 (1923), pp. 647-648 e Journal für Math., 159 (1928), pp. 255-254.

[41] T. R. Hollcroft, *Limits for multiple points and curves of surfaces,* Bull. Amer. Math. Soc., 34 (1928), p. 144 e Tôhoku Math. Journal, 30 (1929), pp. 115-129.

[42] D. B, Jaffe and D. Ruberman, *A sextic surface cannot have 66 nodes,* J. Alg. Geom., 6, no. 1 (1997), pp. 151-158.

[43] A. C. C. M. Kalker, *Kubic fourfolds with fifteen ordinary double points,* Tesi di Dottorato, Università di Leida, 1986.

[44] , H. O, Kreiss, *Üeber syzygetische Flächen,* Annali di Mat., (4), 41 (1955), pp. 105-111.

[45] E. E. Kummer, *Flächen 4. Grades mit 16 singulären Punkten u. s. w.,* Berliner Monatsberichte, 1864.

[46] E. E. Kummer, *Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten,* Collected Papers, vol. 2, Springer-Verlag (1974), pp. 418-432.

[47] O. Labs, *A Septic with 99 real Nodes,* end. Sem. Mat. Univ. Padova, 116 (2006), pp. 299-313.

[48] O. Labs, *Hypersurfaces with Many Singularities,* Ph. D. Thesis, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 2005, available from www.Oliver Labs.net

[49] S. Lefschetz, *On the existence of loci with given singularities,* Trans. Amer. Math. Soc., 14 1913, pp. 23-41.

[50] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la Géometrie algébrique,* Paris 1924; pp. 34,35, 144-145.

[51] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials,* Clarendon Press, Oxford 1979, cap. 12.

[52] Y. Miyaoka, *On the Chern number of surfaces of general type,* Inventiones Math., 42, (1977) pp. 225-237.

[53] Y. Miyaoka, *The maximal number of quotient singularities on surfaces with numerical invariants,* Math. Ann. 268 (1984),159-171.

[54] Y. Miyaoka, *Theme and variations - Inequalities between Chern number -,* Sugaru, 41, (3) (1989) pp. 193-207.

[55] D. Mumford, *Lectures on curves on algebraic surface,* Princeton Univ. Press, 1966.

[56] V. V. Nikulin, *On Kummer surfaces,* Math. USSR Izvestija, 9 (1975) pp. 261-275.

[57] A. Nobile, *Surfaces with nodes in projective space,* J. Pure and Appl. Algebra, 42, (1986), pp. 275-285.

[58] R. Pignatelli and F. Tognoli, *On Wahls proof of $\mu(6) = 65$,* Asian J. Math. Vol. 13, N. 3, pp. 307-310.

[59] J. Plücker, *Theorie der algebraischen Kurven,* Bonn, 1839, pp.1-71, 93.

[60] K. F. W Rohn, *Üeber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachen Punkte,* Math. Ann., 24 (1884), pp. 54-151, no. 14.

[61] K. F. W Rohn, *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung,* Preisschriften der Fürstlich Jablonowzki'schen Gesellschaft, no. IX, Leipzig, 1886.

[62] G. Salmon, *On the degree of a surface reciprocal to a given one,* Cambridge and Dublin Math. J., 2 (1847), pp. 65-73.

[63] G. Salmon, *On the cone circumscribing a surface of m^{th} degree,* Cambridge and Dublin Math. J., 4 (1849), pp. 188-191.

[64] A. Sarti, *Pencils of Symmetric surfaces in $\mathbb{P}^3$,* J. of Algebra 246, no. 1 (2001), pp. 429-452.

[65] A. Sarti, *Symmetric surfaces with many singularities,* Commun. Algebra 32, no. 10, (2004), pp. 3745-3770.

[66] L. Schläfli, *On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Presence or Absence of Singular Points and the Reality of their Lines,* Philos. Trans. Royal Soc., CLIII(1863), pp. 193-241.

[67] B. Segre, *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri,* Rend. Acc. Lincei, (6) 10, (1929-2), pp. 31-38.

[68] B. Segre, *Esistenza di sistemi continui distinti di curve algebriche con dati numeri plückeriani,* Rend. Acc. Lincei, (6) 10, (1929-2), pp. 557-560.

[69] B. Segre, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali,* Mem. Accad. d'Italia, 1 (1930)s, Mem. n. 4, pp.1-31.

[70] B. Segre, *Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine,* Boll. U.M.I. (3) 2 (1947), pp. 204-212.

[71] B. Segre, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche,* Atti Acc. Ligure di Scienze e Lettere, vol. IX (1952) pp. 15-22.

[72] B. Segre, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche,* Volume in onore di G. Loria, 1952.

[73] C. Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXI, 1895-96, pp. 341-357.

[74] C. Segre, *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni,* Atti Acc. di Torino, 22 (1866-67), pp. 791-801.

[75] M. E. Serpico, *Un esempio si ipersuperficie cubica in $\mathbb{P}^6$ con 35 nodi,* Accademia Ligure di Scienze e Lettere, Serie V, 1993, pp. 220-230.

[76] F. Severi, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio,* Annali di Matematica, (4) 25 (1946), pp. 1-41.

[77] F. Severi, *Osservazioni a proposito di una Nota di E. Kähler, ecc.* Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 46 (1932) p. 79.

[78] E. Stagnaro, *Sopra certe supeficie algebriche con singolarità isolate,* Le Matematiche, 23, fasc. 2 (1968), pp. 338-343.

[79] E. Stagnaro, *Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di $\mathbb{P}^3$,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, vol 59 (1978), pp. 179-198.

[80] E. Stagnaro, *A Degree Nine Surface with 39 Triple Points,* Atti Univ. Ferrara, serie VII, vol. L (2004), pp. 111-121.

[81] E. Stagnaro, *A degree twlve surface with 584 nodes,* (Preprint)

[82] E. Stagnaro, *A new construction of a surface of drgree 5 having 31 nodes,* rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 69 (1983), pp. 27-35.

[83] J. Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology,* Comp. Math., 34, no.2, (1977) pp. 221-223 .

[84] J. Steenbrink, *Semicontinuity of the singularity spectrum,* Inv. math.79 (1985), pp. 557-565 .

[85] J. Steiner, *Eigenshaften der Curven viertern Grades rücksichtlick ihrer Doppeltangenten,* Journal für Math., 1755, p. 271

[86] J. Stevens, *Sextic surfaces with ten triple points*, Singularities and computer algebra, 315331, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 324, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[87] G. N. Tjiurina, *Resolution of singularities of plane (= flat) deformations of double rational points,* Funk. Anal. Prilozen, 4 (1970), pp. 77-83.

[88] J. A. Todd, *On a quartic primal with forty-five nodes,* Quart. J. Math. Oxford, ser.7 p. 168-174.

[89] E. G. Togliatti, *Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi,* Rend. Sem. Matem. di Torino, vol. IX (1950), pp. 47-59.

[90] E. G. Togliatti, *Sulle superficie monoidi con il massimo numero di punti doppi,* Annali di Matem. (4) 30 (1949), pp. 201-209.

[91] E. G. Togliatti, *Una notevole superficie di quinto ordine con soli punti doppi isolati,* Festschrift R. Fueter, Zürik, pp. 127-132.

[92] E. G. Togliatti, *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi,* Scritti matematici offerti a L. Berzolari, Pavia 1936, pp.577-593.

[93] E. G. Togliatti, *Ancora sulle forme cubiche dello spazio a 5 dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi,* Atti del I Congresso dell'U. M. I., 1937, pp. 254-258.

[94] E. G. Togliatti, *Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie del quinto ordine,* Studi in onore del prof. S. Ortu Carboni,Roma, 1935,. pp. 253-259.

[95] G. Vaccaro, *Le ipersuperficie di ordine n con un punto $(n-2)$-plo,* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8), 3 (1947), fasc. 3-4.

[96] A. N.J. Varchenko, *On semicontinuity of the spectrum and an upper estimate for the number of singular points of a projective hypersurface,* Soviet Math. Dokl., vol 27 (1883) no.3, pp. 735-739.

[97] E. Veneroni, *Sopra una varietà cubica con quindici punti doppi dello spazio a cique dimensioni,* Rend. Ist. Lombardo, 47 (1913-14), pp. 421-533 e 704-718.

[98] J. Wahl, *Miyaoka–Yau Inequality for Normal Surfaces and Local Analogues,* Contemporary Mathematics 162, 1994.

[99] J. Wahl, *Nodes on sextic hypersurfaces in $\mathbb{P}^3$,* J. Differential Geometry, (1998) pp. 439- 444.

[100] S. T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry ,* Proc. Natl. Acad. Sc. Usa 74 (1977), no. 5, 1978-1979.

[101] H. G. Zeuthen, *Etudes géometriques de quelques-une des propriétés des surfaces dont le points se correspondent un-à-un.* Math. Ann. IV (1871).

Received: 20.03.2012, Accepted: 28.03.2012.

Università degli Studi di Genova, Dipartimento di Matematica, Via Dodecaneso 35, I-16146 Genova, Italy, E-mail: gallarati@vodafone.it and gallarat@dima.unige.it