Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 49(97) No. 4, 2006, 345–358

Problème de Cauchy C^∞ pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire

by
B. Messirdi, A. Rahmani, A. Senoussaoui

Abstract

Le but de cet article est d'établir explicitement à partir d'hypothèses de localisation, des conditions algèbriques de décomposition d'un système d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire. Ces conditions sont suffisantes pour que le problème de Cauchy C^∞ associé soit bien posé. La technique de construction de solutions asymptotiques prouve que ces conditions sont aussi nécessaires.

Abstract: The objective of this paper is to establish explicitly with using localization hypothesis, some algebraically conditions of decomposition of a system of partial differential equations with multiple characteristics and pair multiplicity. These conditions are sufficient for the well posedness of the C^∞ associated Cauchy problem. The technic of the asymptotically solutions prove that these conditions are also necessary.

Key Words: Problème de Cauchy C^∞, hyperbolicité, décomposition d'un opérateur, parametrix.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35S30, 35S05, Secondary 35P05 .

1 Introduction

Depuis longtemps il a été montré dans le cadre des équations aux dérivées partielles que l'existence d'une onde asymptotique permet la contruction de solutions nulles (voir par exemple l'article de S. Mizohata [16]) et que la résolution du problème de Cauchy asymptotique permet la construction d'une parametrix (voir l'article de D. Ludwig [10]).

L'analyse du problème de Cauchy asymptotique entreprise dans le cas des systèmes notamment par J. Vaillant dans [18, 19, 20, 21, 22] puis par R. Berzin dans [1, 2] et par R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4] et aussi dans le cas scalaire par J.C. De Paris dans [5, 6] sans oublier les travaux de W. Matsumoto [11], W. Matsumoto-H. Yamahara [12] et ceux de G. Taglialatela-J. Vaillant [17] et très récemment l'étude des opérateurs intégraux de Fourier et leurs applications aux équations aux dérivées partielles faite par B. Messirdi-A. Senoussaoui dans [13, 14, 15] ont motivé notre recherche, ils constituent aussi un outil de base pour ce travail.

L'objetif de cet article est l'étude du problème de Cauchy C^∞associé à un opérateur différentiel matriciel hyperbolique h à coefficients C^∞sur une variété produit $X = \mathbb{R} \times X'$, X' étant compacte connexe sans bord, les traces sont C^∞ sur X', et où h vérifie deux types d'hypothèses. Des hypothèses de localisation développées par J. Vaillant dans [18, 23] et des hypothèses de décomposition des opérateurs différentiels introduites par J.C. De Paris dans [5, 6] et reprises dans un cadre général par J. Vaillant dans [22] sur les opérateurs d'ordre 1 pour la multiplicité 5. Le cas $(2, 2, 1, ..., 1)$ de la classification générale des systèmes hyperboliques de J. Vaillant [22] est explicitement étudié ici, des conditions nécessaires et suffisantes sont obtenues pour que le problème de Cauchy pour h soit bien posé en C^∞.

Notre travail généralise de manière non triviale des cas étudiés par R. Berzin dans [1, 2] et R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4], en particulier les méthodes que nous utilisons sont originales et nettement différentes, les conditions invariantes que nous établissons sont explicitement exprimées à l'aide des coefficients de h lorsque l'ordre de h est quelconque.

Au paragraphe 2, nous introduisons des hypothèses sur la matrice caractéristique H de h dans les différents anneaux localisés par rapport aux facteurs irréductibles de la décomposition du déterminant de H. Notre localisation généralise le cas double étudié par R. Berzin-J. Vaillant dans [4].

Le but du paragraphe 3 est d'établir des conditions algèbriques de décomposition associées au système matriciel H à caractéristiques de multiplicité paire (cf. [1, 2], [20]). En adaptant à h la notion de décomposition d'un opérateur par rapport au facteur irréductible de multiplicité 4 du déterminant caractéristique, on construit un opérateur auxilliaire q qui nous permet d'utiliser une décomposition de multiplicité 2 au lieu d'une décomposition de multiplicité 4 du système differentiel h.

Au paragraphe 4, nous vérifions que les conditions algèbriques que nous obtenons sont équivalentes à celles utilisées par R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4] pour résoudre le problème de Cauchy C^∞, la solution du problème est exprimée à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier associés à chaque racine caractéristique, comme l'opérateur transposé de h vérifie aussi les conditions de décomposition l'unicité de la solution est aussi obtenue.

En construisant ensuite une onde asymptotique (cf. [3, 4], [8], [9], [22]) qui viole l'inégalité du théorème du graphe fermé de h, on prouve au paragraphe 5 que les conditions suffisantes que nous obtenons sont aussi nécessaires.

2 Notations, hypothèses et définitions

Soit X' une variété C^∞compacte réelle et de dimension n, on note $x' = (x^1, ..., x^\alpha, ..., x^n)$ un point de X', T^+ un réel strictement positif et $X = [0, T^+] \times X'$, on note aussi $x = (x^0, x') = (x^0, x^1, ..., x^\alpha, ..., x^n)$ un point de X dans une carte locale. Un point du fibré cotangent $T^*(X)$ est noté par (x, ξ) avec $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_\alpha, ..., \xi_n)$, on posera $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq n$.

On considère un opérateur différentiel linéaire matriciel

$$h(x, \partial) = (h^A_B(x, \partial))_{1 \leq A, B \leq m}$$

de classe C^∞ sur X, d'ordre t ($t \geq 1$), la matrice caractéristique de h sera notée par $H(x, \xi) = (H^A_B(x, \xi))_{1 \leq A, B \leq m}$, où $\forall A, B \in \{1, ..., m\}$, $H^A_B(x, \xi)$ est définie par:

$$H^A_B(x, \xi) = \begin{cases} \text{le polynôme caractéristique de } h^A_B(x, \partial) \text{ si } ordre(h^A_B(x, \partial)) = t \\ 0 \text{ si } ordre(h^A_B(x, \partial)) < t \end{cases} \tag{2.1}$$

On suppose que $\det(H(x, \xi))$ est une fonction réelle non identiquement nulle C^∞ en x polynômiale en ξ de degré mt.

Dans une carte locale, l'opérateur h s'écrit :

$$h(x, \partial) = H(x, \partial) + H^*(x, \partial) + ... + H^{*(j)}(x, \partial) + ... + H^{*(t)}(x, \partial)$$

où $H^{*(j)}(x, \partial) = (H^{*(j)A}_B(x, \partial))_{1 \leq A, B \leq m}$ est la partie d'ordre $(t - j)$ de $h(x, \partial)$.

On suppose qu'il n'y'a qu'un facteur multiple H_0 de multiplicité 4 dans la décompostion du déterminant caractéristique de h, de sorte que:

$$\det H = H_0^4 K \tag{2.2}$$

où H_0 et K sont des fonctions C^∞ en x et polynômiales en ξ telles que:

1. le degré s de H_0 et χ de K sont constants sur X,

2. $H_0 K$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N = (1, 0, ..., 0)$, c'est à dire pour tout (x, ξ'), $\xi' \neq 0$, l'équation $H_0 K(x, \xi_0, \xi') = 0$ admet $s + \chi$ racines réelles distinctes $\xi_0^\varrho(x, \xi')$, $1 \leq \rho \leq s + \chi$, ces racines sont des fonctions C^∞ en (x, ξ') et positivement homogènes de degré 1 en ξ'.

Définition 2.1. *Etant donnés trois polynômes P, Q et U en ξ à coefficients C^∞ en x. Si le polynôme $(P - Q)$ en ξ est divisible par U, on note $P \equiv Q[U]$. Si P et Q sont deux matrices de polynômes en ξ à coefficients C^∞ en x, on note $P \equiv Q[U]$ si et seulement si $P^A_B \equiv Q^A_B[U]$ pour tout A,B, si $P = \left(P^A_B\right)_{A,B}$ et $Q = \left(Q^A_B\right)_{A,B}$.*

Définition 2.2. *Si a et b sont deux opérateurs différentiels matriciels d'ordres respectifs r et r', la partie $(a\circ b)^*(x,\partial)$ d'ordre $(r+r'-1)$ de $(a\circ b)(x,\partial)$ est donnée dans une carte locale quelconque de X par:*

$$(a\circ b)^*(x,\partial)=[AB^*+\partial^\alpha A\partial_\alpha B+A^*B](x,\partial) \tag{2.3}$$

avec la convention d'Einstein $\partial^\alpha A\partial_\alpha B=\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=n}\partial^\alpha A\partial_\alpha B$ qu'on utilisera par la suite sauf mention contraire, où A et B sont les matrices caractéristiques respectives de a et b.

La partie d'ordre $(r+r'-2)$ de $(a\circ b)$ est:

$$(a\circ b)^{**}(x,\partial)=[AB^{**}+\partial^\alpha A\partial_\alpha B^*+\frac{1}{2!}\partial^{\alpha\beta}A\partial_{\alpha\beta}B+\partial^\alpha A^*\partial_\alpha B+A^*B^*](x,\partial) \tag{2.4}$$

On considère l'anneau localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\xi]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_0 (cf. [23]), il s'agit d'un anneau principal dans lequel H est supposée équivalente à la matrice diagonale:

$$diag[H_0^2,H_0^2,1,...,1] \tag{2.5}$$

L'opérateur h est dit de type (2.2).

Notations 2.3. (cf. [19, 20, 21, 22]) :

(i) La matrice des cofacteurs de H est divisible par H_0^2 dans $\mathbb{R}[\xi]$,de plus il existe au moins un cofacteur d'ordre $(m-2)$ de H qui n'est ni identiquement nul ni divisible par H_0. Nous convenons que ce soit A_{12}^{12} c'est à dire le mineur obtenu en barrant la première et la deuxième ligne et la première et la deuxième colonne dans la matrice H, on suppose aussi que pour tout x il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H_0.

(ii) A_{CD}^{AB} est le cofacteur d'ordre $(m-2)$ de H obtenu en rayant la Cème et la Dème lignes et la Aème et la Bème colonnes et en mettant le signe convenable (si $A\neq B$ et $C\neq D$) et vaut 0 sinon (si $A=B$ ou $C=D$).

(iii) un indice chapeauté varie entre 3 et m, $3\le\hat{B}\le m$. Un indice barré varie entre 1 et 2, $1\le\overline{A}\le 2$.

$$A^{1\ \ \ 2}_{\overline{A}-1\ B}=\begin{cases}A^{12}_{B2}\text{ si }\overline{A}=1\\A^{12}_{1B}\text{ si }\overline{A}=2\end{cases}\ ,\quad A^{\overline{A}-1\ B}_{1\ \ \ \ 2}=\begin{cases}A^{B2}_{12}\text{ si }\overline{A}=1\\A^{1B}_{12}\text{ si }\overline{A}=2\end{cases}$$

$$A^{\overline{D}-1\ \ \overline{D}+1}_{\overline{A}-1\ \ \overline{A}+1}=\begin{cases}A^2_2\text{ si }(\overline{A},\overline{D})=(1,1)\\A^1_2\text{ si }(\overline{A},\overline{D})=(1,2)\\A^2_1\text{ si }(\overline{A},\overline{D})=(2,1)\\A^1_1\text{ si }(\overline{A},\overline{D})=(2,2)\end{cases}$$

Les cofacteurs $A^{\overline{D}-1\ \ \overline{D}+1}_{\overline{A}-1\ \ \overline{A}+1}$ sont donc divisibles par H_0^2 ou identiquement nuls, d'après l'identité de Jacobi entre les cofacteurs de H, on a

$$\det\left[A^{\overline{D}-1\ \ \overline{D}+1}_{\overline{A}-1\ \ \overline{A}+1}\right]=A^{12}_{12}\det H \tag{2.6}$$

ce qui implique que les cofacteurs $A^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}_{\overline{A}-1\ \overline{A}+1}$ ne sont pas tous nuls car A^{12}_{12} et $\det H$ ne le sont pas par hypothèse. De plus, si on définit la matrice $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}})$ par:

$$\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}} = (-1)^{\overline{A}+\overline{D}} \frac{A^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}_{\overline{A}-1\ \overline{A}+1}}{H_0^2}, \ \overline{A}, \overline{D} = 1, 2 \tag{2.7}$$

alors $\det \mathcal{A} = K A^{12}_{12}$, il n'est pas divisible par H_0 et n'est pas identiquement nul.

On a aussi (cf. [19, 20, 21]):

$$\begin{cases} H^{\overline{A}}_B A_1^{\overline{D}-1\ \ B}{}_{2} = H_0^2 \mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}} & \text{et} \quad H^{\widehat{C}}_B A_1^{\overline{D}-1\ \ B}{}_{2} = 0 \\ A^{1}_{\overline{F}-1}{}^{2}_{A} H^{A}_{\overline{E}} = H_0^2 \mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{E}} & \text{et} \quad A^{1}_{\overline{F}-1}{}^{2}_{A} H^{A}_{\widehat{C}} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

d'où, $H^A_B A_1^{\overline{D}-1\ \ B}{}_{2}$ et $A^{1}_{\overline{F}-1}{}^{2}_{A} H^A_B$ sont divisibles par H_0^2 et

$$A^{1}_{\overline{F}-1}{}^{2}_{A} H^A_B A_1^{\overline{D}-1\ \ B}{}_{2} = H_0^2 A^{12}_{12} \mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} \tag{2.9}$$

3 Conditions de décomposition

Pour traîter le cas $\nu_0 = 4$ qui généralise le cas double $\nu_0 = 2k_0$ avec $k_0 = 2$, on construit un opérateur q qui nous permet d'utiliser une décompostion de multiplicité 2 au lieu d'une décomposition de multiplicité 4 de l'opérateur h. En particulier, la décomposition de R. Berzin-J. Vaillant utilisée pour le cas $k_0 = 1$ dans [4] ne peut être adaptée à notre situation, notre étude revèle que les opérateurs différentiels que nous obtenons sont en pratique assez généraux.

Explicitons maintenant dans le cas de la multiplicité 4 la notion de décomposition des opérateurs hyperboliques de J. Vaillant [22].

On pose:

$$\underline{a} = \left[a_1^{\overline{A}-1\ \ B}{}_{2}\right]_{\substack{1\le B\le m \\ 1\le \overline{A}\le 2}} \quad , \quad \overline{a} = \left[a^{1}_{\overline{A}-1}{}^{2}_{B}\right]_{\substack{1\le \overline{A}\le 2 \\ 1\le A\le m}} \quad , \quad b = \left[a^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}\right]_{1\le B,C\le m} \tag{3.1}$$

des opérateurs différentiels de matrices caractéristiques respectivement:

$$\underline{\mathcal{A}} = \left[A_1^{\overline{A}-1\ \ B}{}_{2}\right]_{\substack{1\le B\le m \\ 1\le \overline{A}\le 2}}, \ \overline{\mathcal{A}} = \left[A^{1}_{\overline{A}-1}{}^{2}_{A}\right]_{\substack{1\le \overline{A}\le 2 \\ 1\le B\le m}}, \ \mathcal{B} = \left[A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}\right]_{1\le B,C\le m} \tag{3.2}$$

où $A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}$ est un cofacteur d'ordre $(m-3)$ de H obtenu en rayant les première, deuxième et Bème colonnes et les première, deuxième et Cème lignes et en mettant le signe convenable si $B \neq 1, B \neq 2, C \neq 1, C \neq 2$, sinon $A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C} = 0$.

On considère l'opérateur $q = \overline{a} h p$ où $p = \underline{a} a^{1\ 2}_{1\ 2} - b h \underline{a} a^{1\ 2}_{1\ 2}$, $a^{1\ 2}_{1\ 2}$ désigne l'opérateur scalaire de polynôme caractéristique $A^{1\ 2}_{1\ 2}$, p (resp. q) est donc un opérateur différentiel matriciel à m (resp. 2) lignes et 2 (resp. 2) colonnes $p = (p^B_{\overline{F}})_{\substack{1\le B\le m \\ 1\le \overline{F}\le 2}}$ (resp. $q = (q^{\overline{F}}_{\overline{D}})_{1\le \overline{F},\overline{D}\le 2}$).

Proposition 3.1. *On a:*

(i) $ordre(p) = 2(m-2)t$,

(ii) $P = \underline{\mathcal{A}}A_{1\ 2}^{1\ 2}$ *est le symbole principal de* p,

(iii) $ordre(bhq) < ordre(pa_{1\ 2}^{1\ 2})$,

(iv) $\forall \widehat{A} \in \{3, ..., m\}, \ \forall \overline{F} \in \{1, 2\}, \ \ ordre(h_B^{\widehat{A}} p_{\overline{F}}^B) \leq 2(m-2)t + t - 2.$

Démonstration: Comme $\underline{\mathcal{A}} \neq 0$, alors

$$\begin{cases} ordre(\underline{a}) = ordre(a_{1\ 2}^{1\ 2}) = (m-2)t \\ ordre(\underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2}) = (m-2)t + (m-2)t = 2(m-2)t \\ ordre(bh\underline{a}) \leq (m-3)t + t + (m-2)t = 2(m-2)t \end{cases}$$

D'autre part, $BH\underline{\mathcal{A}} = \left[\mathcal{B}_C^B H_D^C \underline{\mathcal{A}}_{\overline{F}}^D\right]_{\substack{1 \leq B \leq m \\ 1 \leq \overline{F} \leq 2}} = 0$ car $\mathcal{B}_C^B = 0$ si B ou $C \in \{1, 2\}$ et $\mathcal{B}_C^B H_D^C \underline{\mathcal{A}}_{\overline{F}}^D = \mathcal{B}_{\widehat{C}}^B H_D^{\widehat{C}} \underline{\mathcal{A}}_{\overline{F}}^D = 0$ d'après (2.8). D'où, $ordre(bh\underline{a}) < 2(m-2)t$.

Ainsi, $ordre(p) = ordre(\underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2}) = 2(m-2)t$ et $P = \underline{\mathcal{A}}A_{1\ 2}^{1\ 2}$, ce qui montre *(i)* et *(ii)*.

Pour *(iii)*, on a:

$$ordre(bhq) \leq ordre(bh\underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2}) < ordre(\underline{a}(a_{1\ 2}^{1\ 2})^2) = ordre(pa_{1\ 2}^{1\ 2})$$

Montrons *(iv)*,

$$p_{\overline{F}}^B = \underline{a}_{\overline{F}}^B a_{1\ 2}^{1\ 2} - b_C^B h_D^C \underline{a}_{\overline{F}}^D \quad \text{et} \quad h_B^{\widehat{A}} p_{\overline{F}}^B = h_B^{\widehat{A}} \underline{a}_{\overline{F}}^B a_{1\ 2}^{1\ 2} - h_{\widehat{B}}^{\widehat{A}} b_{\widehat{C}}^{\widehat{B}} h_D^{\widehat{C}} \underline{a}_{\overline{F}}^D \tag{3.3}$$

Posons $l_{\overline{F}}^{\widehat{A}} = h_B^{\widehat{A}} \ \underline{a}_{\overline{F}}^B$, donc $h_D^{\widehat{C}} \underline{a}_{\overline{F}}^D = l_{\overline{F}}^{\widehat{C}}$ et en vertu de (2.8), on a

$$ordre(l_{\overline{F}}^{\widehat{A}}) \leq t + (m-2)t - 1$$

de plus,

$$ordre(h_B^{\widehat{A}} p_{\overline{F}}^B) \leq t + (m-2)t - 1 + (m-2)t = 2(m-2)t + t - 1$$

Puisque $H_{\widehat{B}}^{\widehat{A}} \mathcal{B}_{\widehat{C}}^{\widehat{B}} = A_{12}^{12} \delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}}$ ($\delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}}$ est le symbole de Krônecker), alors si $(L_{\overline{F}}^{\widehat{A}})$ est la matrice caractéristique de l'opérateur matriciel $(l_{\overline{F}}^{\widehat{A}})$, la partie d'ordre $2(m-2)t + t - 1$ de $h_B^{\widehat{A}} \ p_{\overline{F}}^B$ est

$$L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} A_{1\ 2}^{1\ 2} - A_{1\ 2}^{1\ 2} L_{\overline{F}}^{\widehat{C}} \delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}} = L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} A_{1\ 2}^{1\ 2} - A_{1\ 2}^{1\ 2} L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} = 0 \tag{3.4}$$

□

Définition 3.2. *On dira que l'opérateur h vérifie la condition (L) si et seulement si il existe* 3 *opérateurs différentiels matriciels l_0, l_1, l_2 et un opérateur différentiel scalaire h_0 de symbole principal H_0 tels que:*

(L_1) $q(x,\partial) = [l_0 h_0^2 + l_1 h_0 + l_2](x,\partial)$,
(L_2) $ordre[(q - l_0 h_0^2)] \leq ordre(q) - 1$,
(L_3) $ordre[(q - l_0 h_0^2 - l_1 h_0)] \leq ordre(q) - 2$.
l_0 est tel que sa matrice caractéristique L_0 ne soit pas divisible par H_0.

Explicitons cette définition en déterminant les conséquences de (L). Si h vérifie (L), alors l'opérateur $q(x,\partial) = [l_0 h_0^2 + l_1 h_0 + l_2](x,\partial)$ s'écrit dans une carte locale quelconque de X :

$$q(x,\partial) = Q(x,\partial) + Q^*(x,\partial) + \ldots + (\text{termes d'ordre} \leq (ordre\,(q) - 2))$$

D'après (2.9), la partie principale de q est $Q = \overline{\mathcal{A}} HP == H_0^2 \left[A^{1\,2}_{1\,2}\right]^2 \mathcal{A}$.

En identifiant les termes d'ordre égale à $ordre\,(q)$, on obtient $Q = L_0 H_0^2$. D'où, $L_0 = \left[A^{1\,2}_{1\,2}\right]^2 \mathcal{A}$ et $L_0 \not\equiv 0[H_0]$ car $A^{1\,2}_{1\,2} \not\equiv 0[H_0]$ et $\mathcal{A} \not\equiv 0[H_0]$.

Cherchons maintenant la partie principale de $(q - l_0 h_0^2)(x,\partial)$, pour cela nous avons besoin d'abord de la partie homogène Q^* de q d'ordre égal à $(ordre\,(q) - 1)$ modulo $[H_0]$.

$$Q^*{}^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A} (h^A_B p^B_{\overline{D}})^* + (\overline{a}^{\overline{F}}_{A})^* H^A_B P^B_{\overline{D}} + \partial^\alpha \overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A} \partial_\alpha (H^A_B P^B_{\overline{D}})$$

On a en vertu de (2.8), $H^A_B P^B_{\overline{D}} \equiv 0[H_0^2]$. D'où,

$$\partial_\alpha (H^A_B P^B_{\overline{D}}) \equiv 0[H_0] \text{ et } Q^*{}^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A}[H^A_B (P^B_{\overline{D}})^* + H^*{}^A_B P^B_{\overline{D}} + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha P^B_{\overline{D}}] \text{ modulo}[H_0]$$

D'une part,

$$\overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A} H^A_B \equiv 0[H_0^2]$$

D'autre part,

$$\partial_\alpha P^B_{\overline{D}} = A^{1\,2}_{1\,2}\ \partial_\alpha \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} + \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} \partial_\alpha A^{1\,2}_{1\,2}$$
$$(\partial^\alpha H^A_B) \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} = \partial^\alpha (H^A_B \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}}) - H^A_B \partial^\alpha \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} \equiv -H^A_B \partial^\alpha \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} [H_0]$$

Alors

$$\overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A} H^A_B \partial^\alpha \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} \equiv 0[H_0]$$

Finalement,

$$Q^*{}^{\overline{F}}_{\overline{D}} \equiv A^{1\,2}_{1\,2}\ \overline{\mathcal{A}}^{\overline{F}}_{A} [H^*{}^A_B \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}} + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha \underline{\mathcal{A}}^B_{\overline{D}}][H_0]$$

On a besoin ensuite de la partie homogène de $l_0 h_0^2$ d'ordre égal à $(ordre\,(q) - 1)$ modulo $[H_0]$.

$$\begin{aligned}(l_0 h_0^2)^* &= (l_0)^* H_0^2 + L_0 [h_0^2]^* + \partial^\alpha L_0 \partial_\alpha H_0^2 \\ &\equiv L_0 \partial^\alpha H_0 \partial_\alpha H_0 [H_0]\end{aligned}$$

Donc
$$[l_0 h_0^2)^*]_{\overline{D}}^{\overline{F}} \equiv [A_{1\ 2}^{1\ 2}\ ]^2 \mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{F}} \partial^\alpha H_0 \partial_\alpha H_0 [H_0]$$
le symbole principal de $(q - l_0 h_0^2)_{\overline{D}}^{\overline{F}}$ est égal modulo $[H_0]$ à:
$$A_{1\ 2}^{1\ 2}\ \overline{\mathcal{A}}_A^{\overline{F}} [H^*\ {}_B^A \underline{\mathcal{A}}_{\overline{D}}^B + \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha \underline{\mathcal{A}}_{\overline{D}}^B] - [A_{1\ 2}^{1\ 2}\ ]^2 \mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{F}} \partial^\alpha H_0 \partial_\alpha H_0$$
qui est aussi égal à $L_1 H_0$ où L_1 est la matrice caractéristique de l_1, donc divisible par H_0.

Puisque $A_{1\ 2}^{1\ 2}\ \not\cong 0[H_0]$, on a ainsi établi le résultat suivant:

Proposition 3.3. *Si h vérifie (L), alors dans une carte locale quelconque de X:*
$$\mathcal{K}_{\overline{D}}^{\overline{F}} = \overline{\mathcal{A}}_A^{\overline{F}} [H^*\ {}_B^A \underline{\mathcal{A}}_{\overline{D}}^B + \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha \underline{\mathcal{A}}_{\overline{D}}^B] - A_{1\ 2}^{1\ 2}\ \mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{F}} \partial^\alpha H_0 \partial_\alpha H_0 \tag{3.5}$$
H_0 est divisible par H_0, $\forall \overline{F}, \overline{D} \in \{1,2\}$.

Remarque 3.4. *Les invariants algébriques $\mathcal{K}_{\overline{D}}^{\overline{F}}$ obtenus dans (3.5) sont équivalents modulo $[H_0]$ à ceux trouvés dans [2] et [4], où il est montré que si la matrice $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{\overline{D}}^{\overline{F}})$ est divisible par H_0 alors le problème de Cauchy C^∞ pour h est bien posé en C^∞.*

4 Résolution du problème de Cauchy C^∞

Le résultat principal de cet article est:

Théorème 4.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy pour h soit bien posé en C^∞ est que h vérifie (L).*

Démonstration: Si h vérifie (L), le problème de Cauchy pour h est bien posé en C^∞. Ceci résulte de la construction pour h et son adjoint de paramétrixes relatives à chaque racine $\xi_0^\rho(x, \xi')$, $1 \leq \rho \leq s + \chi$, par la méthode des opérateurs intégraux de Fourier (cf. [1, 2, 4, 7, 13, 22]).

Pour établir que la condition (L) est nécessaire, on sait que si le problème de Cauchy est bien posé, on déduit du théorème du graphe fermé, qu'il existe un voisinage de $y = (y^0, y')$, un entier k, un compact W du voisinage et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $u \in C^\infty(X)$, on ait
$$|u|_{0,W} \leq C[|hu|_{k,W} + \left|u(y^0, x')\right|_{k, W \cap \{x^0 = y^0\}}] \tag{4.1}$$
où $|u|_{k,W}$ désigne une semi-norme usuelle de C^∞ (la borne supérieure des dérivées jusqu'à l'ordre k sur le compact W).

En remarquant que si $\mathcal{K}$ s'annule dès que H_0 s'annule alors $\mathcal{K}$ est divisible par H_0, on déduit que si (L) n'est pas vérifiée on peut trouver un point $y = (y^0, y')$ de X et une fonction réelle ϕ définie dans un voisinage W de y sur lequel on ait
$$H_0(x, grad\phi(x)) = 0 \ \text{ et } \ \mathcal{K}(y, grad\phi(y)) \neq 0, \tag{4.2}$$

alors le problème de Cauchy pour h n'est pas bien posé dans ce voisinage. En effet, Il suffit donc, de démontrer qu'on peut trouver une fonction u qui viole l'inégalité (4.1). On cherche u sous la forme asymptotique

$$u(x,\rho) = \exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)] \sum_{j=0}^{\infty} Y_{t+j}(x)\rho^{-j/2} \quad , \quad \rho \to +\infty \tag{4.3}$$

Pour que hu se calcul d'une manière facile il sera en fait plus commode d'écrire cette expression sous la forme

$$u(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,\rho) f_j\left(\phi_0(x)\right) \tag{4.4}$$

où $f_j(\zeta) = (i\rho)^{-j} \exp(i\rho\zeta) \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\frac{df_j(\zeta)}{d\zeta} = f_{j-1}(\zeta)$. On explicite ensuite les coefficients des $\rho^{t-j/2}$, $j = 0,1,2,3,...$ et on les annule.

Considérons $S = \{x \in X \ ; \ \phi(x) = 0\}$ une hypersurface de X de dimension n non caractéristique pour h, alors en tout point x de S il existe une carte locale (U,θ) de X, telle que $S \cap U = \left\{x \in U;\ \theta^0(x) = x^0 = 0\right\}$ où $\theta = (\theta^0, \theta^1, ..., \theta^n)$, $\theta(x) = (x^0, x^1, ..., x^n)$, on a ici $\theta^0(x) = \phi(x)$. De plus, $(S \cap U, \theta^1_{|S\cap U}, ..., \theta^n_{|S\cap U}) \in$atl$(S,x)$, dans la suite on considère les expressions locales dans ces deux cartes de X et S. En particulier, $H_0(x, grad\phi(x)) = 0$ et $\phi(0,x',\xi') = \sum_{i=1}^{n} x^i\xi_i$. Prenons tout de suite $\phi_0 = \delta\phi$, $\delta = \pm 1$, ϕ est évidemment à valeurs réelles. On note $H(\phi) = H(x,\ grad\phi(x))$, $A_1^{1\ 2}{}_{2}(\phi) = A_1^{1\ 2}{}_{2}(x,\ grad\phi(x))$,...

On utilisera la formule des sommes asymptotiques formelles (cf. [5, 22]):

$$h^A_B u^B = \sum_{l\geq 0} \sum_{r+j=l} h^{A,r}_B(\phi_0)[u^B_j](f_{-t+l}(\phi_0)) \tag{4.5}$$

où $(h^{A,r}_B(\phi_0))_r$ est la famille d'opérateurs matriciels associés à h et à la fonction réelle ϕ_0, avec

$h^{A,0}_B(\phi_0) = H^A_B(\phi_0)$

$h^{A,1}_B(\phi_0) = \partial^\alpha H^A_B(\phi_0)\partial_\alpha + H^{*A}_B(\phi_0)$

$h^{A,2}_B(\phi_0) = \frac{1}{2!}\partial^{\alpha\beta} H^A_B(\phi_0)\partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H^{*A}_B(\phi_0)\partial_\alpha + H^{**A}_B(\phi_0)$

$h^{A,3}_B(\phi_0) = \frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma} H^A_B(\phi_0)\partial_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2!}\partial^{\alpha\beta} H^{*A}_B(\phi_0)\partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H^{**A}_B(\phi_0)\partial_\alpha + H^{***A}_B(\phi_0)$

et ainsi de suite...

(a) coefficient de ρ^0 :

$$H(\phi)Y_t = 0 \tag{4.6}$$

(b) le coefficient de $\rho^{-1/2}$ s'obtient en prenant $l = 1$ dans l'expression hu, or $l = 1$ correspond à $r = 0$, $j = 1$ ou $r = 1$, $j = 0$.

$r = 0$, $j = 1$:

$$\begin{aligned} h^{A,0}_B(\phi_0)[u^B_1](f_{-t+1} \circ \phi_0) &= H^A_B(\phi_0) u^B_1(x,\rho)(i\rho)^{t-1} \exp\{i\rho\phi_0(x)\} \\ &= H^A_B(\phi_0) Y^B_{t+1}(x)\rho^{-1/2}(i\rho)^t \exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)] \end{aligned}$$

$r = 1,\ j = 0$:

$$h_B^{A,1}(\phi_0)[u_0^B](f_{-t+1} \circ \phi_0) =$$
$$\{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha u_0^B(x,\rho) + H_B^{*A}(\phi_0)u_0^B(x,\rho)\}(i\rho)^{t-1}\exp\{i\rho\phi_0(x)\} =$$
$$\{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)(i\rho)^{t-1} + \partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_t^B(x)\rho^{-1/2}(i\rho)^t$$
$$+H_B^{*A}(\phi_0)Y_t^B(x)(i\rho)^{t-1}\}\exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)]$$

en isolant les coefficients de $\rho^{-1/2}$, on a:

$$H(\phi)Y_{t+1} + \partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi\delta Y_t = 0 \tag{4.7}$$

(c) coefficient de ρ^{-1}, il s'agit du cas $l = 2$, soit $r = 0,\ j = 2$; $r = 1,\ j = 1$; ou $r = 2,\ j = 0$.

$r = 0,\ j = 2$:

$$h_B^{A,0}(\phi_0)[u_2^B](f_{-t+2} \circ \phi_0) = H_B^A(\phi_0)Y_{t+2}^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t\exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)]$$

$r = 1,\ j = 1$:

$$h_B^{A,1}(\phi_0)[u_1^B](f_{-t+2} \circ \phi_0) =$$
$$\{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_{t+1}^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t + \partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_{t+1}^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t +$$
$$H_B^{*A}(\phi_0)Y_{t+1}^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t\}\exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)]$$

$r = 2,\ j = 0$:

$$h_B^{A,2}(\phi_0)[u_0^B](f_{-t+2} \circ \phi_0) = \{\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t +$$
$$\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)\partial_\beta Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t +$$
$$+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)\partial_\beta\psi(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t$$
$$+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}\psi(x)Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t +$$
$$+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)\partial_\beta\psi Y_t^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t$$
$$+\partial^\alpha H_B^{*A}(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t + \partial^\alpha H_B^{*A}(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t$$
$$+H_B^{**A}(\phi_0)Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t\}\exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)]$$

en isolant les coefficients de ρ^{-1}, on obtient l'équation:

$$H(\phi)Y_{t+2}+\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi\delta Y_{t+1}+\{\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi-i\delta(\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha+H^*(\phi))\}Y_t = 0 \tag{4.8}$$

(d) les coefficients de $\rho^{-3/2}$ s'obtiennent par le même procédé:

$$\begin{aligned}&H(\phi)Y_{t+3}+\delta\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi Y_{t+2}+\\&\{\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi-i\delta(\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha+H^*(\phi))\}Y_{t+1}+\\&\{\frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}H(\phi)\delta\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\psi-i[\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\beta\psi\partial_\alpha+\\&+\partial^\alpha H^*(\phi)\partial_\alpha\psi+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H^A_B(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}\psi]\}Y_t=0\end{aligned}\tag{4.9}$$

Résolution des équations (4.6) **à** (4.9) (cf. [4, 18, 22]):

On résout (4.6), $Y_t^{\overline{D}}$, $1\le\overline{D}\le 2$, étant pour l'instant arbitraires, on ne répétera pas toujours la lettre ϕ:

$$Y_t^B=\sum_{\overline{D}=1}^{2}\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}Y_t^{\overline{D}}\tag{4.10}$$

On conviendra aussi d'omettre $\sum$ dans les conditions analogues à celles de cette formule. On remarque que (4.7) est possible en multipliant par $\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F$ et en utilisant le fait que $\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F H^F_B=0$ et $\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F\partial^\alpha H^F_B\mathcal{A}^B_{\overline{D}}=0$.

Résolvons (4.7), on obtient:

$$Y^B_{t+1}=\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}Y^{\overline{D}}_{t+1}+\delta\partial^\alpha[\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha\psi Y_t^{\overline{D}}\tag{4.11}$$

Déterminons maintenant la condition de compatibilité de (4.8) en multipliant par $\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F$:

$$\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F[\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha\psi\delta Y^B_{t+1}+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H^F_B\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi Y^B_t]=i\delta\overline{\mathcal{A}}^{\overline{A}}_F[\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha Y^B_t+H^{*F}_B Y^B_t]$$

en reportant les valeurs de Y^B_{t+1} et Y^B_t, et en posant $p=d_\xi H(\phi)$, on a:

$$A^{12}_{12}[p^\alpha\partial_\alpha\psi]^2\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}}Y_t^{\overline{D}}=i\delta\mathcal{K}^{\overline{A}}_{\overline{D}}Y_t^{\overline{D}},\ \overline{A}=1,2\tag{4.12}$$

cette équation est résoluble quel que soit $Y_t^{\overline{D}}$, $\overline{D}=1,2$, si $A^{12}_{12}[p^\alpha\partial_\alpha\psi]^2\mathcal{A}=i\delta\mathcal{K}$, avec $\mathcal{A}\neq 0$, $\mathcal{K}\neq 0$, donc si $[p^\alpha\partial_\alpha\psi]\neq 0$ dans un voisinage de y.

On détérmine alors ψ, δ, W, de sorte que cette condition soit réalisée. On résout (4.8), on obtient:

$$Y^B_{t+2}=\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}Y^{\overline{D}}_{t+2}+\delta\partial^\alpha[\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha\psi Y^{\overline{D}}_{t+1}-i\delta\partial^\alpha[\frac{\mathcal{A}^B_{\overline{D}}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha Y_t^{\overline{D}}+G^{B,\overline{D}}Y_t^{\overline{D}}\tag{4.13}$$

où $G^{B,\overline{D}}$ sont des coefficients réguliers.

Ecrivons aussi que (4.9) est compatible en multipliant par $\overline{\mathcal{A}}_F^{\overline{A}}$ et en substituant les expressions de Y^B_{t+2}, Y^B_{t+1}, Y^B_t, on a:

$$2i\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}} p^\alpha \partial_\alpha \psi p^\beta \partial_\beta Y_t^{\overline{D}} + W^{\overline{D}} Y_t^{\overline{D}} = 0,\ \overline{A} = 1, 2 \tag{4.14}$$

où les $W^{\overline{D}}$ sont des coefficients réguliers.

$p = (p^\alpha)_{0\leq\alpha\leq n}$ définit un champ de vecteurs de classe C^∞ non nul sur X pour lequel il existe une carte locale de X dans laquelle $p = \partial_0$. Dans cette carte locale (4.14) devient:

$$2i\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}} \partial_0 Y_t^{\overline{D}} \partial_0 \psi + W^{\overline{D}} Y_t^{\overline{D}} = 0,\ \overline{A} = 1, 2 \tag{4.15}$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre le long des bicaractéristiques relatives à $H_0(p = d_\xi H_0(\phi))$. On en déduit alors Y_t^B, puis en itérant ce procédé les Y^B_{t+j} pour tout j et par suite une solution asymptotique convenable telle que $|hu|_{k,W} = \mathcal{O}(\rho^{-k_0}) \exp[\sup_{x\in W} |\psi(x)|\, \rho^{1/2}]$ pour un certain $k_0 > 0$.

On a de plus (cf. [22]):

$$|u|_{0,W} = \exp[\sup_{x\in W} |Im\psi(x)|\, \rho^{1/2}](U + o(\rho)) \quad , \quad U \neq 0 \tag{4.16}$$

par le choix de $Y_t(x) \neq 0$ dans le voisinage W, et

$$|u(0, x')|_{k,W} = \mathcal{O}(\rho^k) \exp[\sup_{x\in W} |Im\psi(0, x')|\, \rho^{1/2}](U + o(\rho)) \tag{4.17}$$

pour ρ assez grand, on obtient une fonction u qui viole l'inégalité du graphe fermé. $\square$

Remarque 4.2. *Si on considère dans (2.8) la matrice $\mathcal{A}$ de tous les cofacteurs de H de sorte que $H\mathcal{A} = \mathcal{A}H = H_0^4 KI$, I matrice unité de dimension m, on retrouve les résultats de [22] dans le cas de la multiplicité $m_1 = 4$. Nos résultats peuvent aussi être étendus à la classe de Gevrey.*

Acknowledgements

Investigations supported by University of Oran Es-Sénia, Algeria. Research topics CNEPRU B3101/02/03.

References

[1] Berzin, R.: *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double.* C.R.A.S. Paris,275, Série A, p1091-1094, 1972.

[2] BERZIN, R.: *Le problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double.* C.R.A.S. Paris, tome 280, Série A, 1975, p443-445.

[3] BERZIN, R. ET VAILLANT, J.: *Parametrix du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples.* C.R.A.S. Paris,283, Série A, p485-487, 1976.

[4] BERZIN, R. ET VAILLANT, J.: *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples.* J. Math. Pures et Appliquées. 58, 1979, p165-216.

[5] DE PARIS, J.C.: *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité.* J. Math. Pures et Appli. t. 51, 1972, p231-256.

[6] DE PARIS, J.C.: *Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable.* J. Math. Pures et Appli. t. 51, 1972, p465-488.

[7] DUISTERMAAT, J.J.: *Applications of Fourier Integral.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, 197, (1972).

[8] FLASCHKA, H. AND STRANG, G.: *The correcness of the Cauchy problem.* Adv. in Math. Vol. 6, n°3, 1971, p347-379.

[9] IVRII, V. AND PETKOV, V.M.: *Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed.* Uspechi Math. Nauk, Vol. 29, n°5, 1974, p3-70.

[10] LUDWIC, D.: *Exact and asymptotic solution of the Cauchy problem.* Comm. on Pure and Appl. Math. Vol.13, 1960, p473-508.

[11] MATSUMOTO, W.: *Normal form of systems of partial differential and pseudo-differential operators in formal symbol classes and applications.* J. Math. Kyoto Univ. 34-1 (1994), p15-40.

[12] MATSUMOTO, W. AND YAMAHARA, H.: *On the Cauchy-Kowaleskaya theorem for systems.* Proc. Japan Acad. 67-6 (1991), p181-185.

[13] MESSIRDI, B. ET SENOUSSAOUI, A.: *Parametrix du problème de Cauchy C^∞ muni d'un système d'ordres de Leray-Volevič.* Journal for Analysis and its Applications. Vol 24, (3), 2005, p581-592.

[14] MESSIRDI, B. ET SENOUSSAOUI, A.: *Méthode BKW formelle et spectre des molécules polyatomiques dans l'approximation de Born-Oppenheimer.* Canadian Journal of Physics, Vol. 79/4 (2001), p757-771.

[15] MESSIRDI, B. AND SENOUSSAOUI, A.: *L^2 boundedness and L^2 compactness of a class of Fourier integral operators.* E. Journal of Diff. Equa. Vol. 26 (2006), p1-12.

[16] MIZOHATA, S.: *Solutions nulles et solutions non analytiques.* J. Math. Kyoto Univ. p1-2, 1962.

[17] TAGLIALATELA, G. ET VAILLANT, J.: *Conditions invariantes d'hyperbolicité des systèmes et réduction des systèmes.* Bull. Sci. Math. 120 (1996), p19-97.

[18] VAILLANT, J.: *Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol. 15, n°2, 1965, p225-311.

[19] VAILLANT, J.: *Etude d'un système en multiplicité 4 lorsque le degrée du polynôme minimal est petit.* Partial Differential Equations and Calculus of Variations. Birkhäuser Vol. II, 1989, p959-981.

[20] VAILLANT, J.: *Problème de Cauchy caractéristique et propriétés des bicaractéristiques pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire.* C.R.A.S. Paris,267, 1968, p891-894.

[21] VAILLANT, J.: *Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques.* J. Math. Pures et Appl. Vol. 50, 1971, p25-51.

[22] VAILLANT, J.: *Invariants des systèmes d'opérateurs différentiels et sommes formelles asymptotiques.* Japan J. Math. Vol. 25, No1, 1999, p1-153.

[23] VAILLANT, J.: *Conditions d'hyperbolicité des systèmes d'opérateurs aux dérivées partielles.* Bull. Sci. Math. 114 (1990), p243-328.

Received: 31.10.2005.

Université d'Oran Es-Sénia, Facult é des Sciences
Département de Mathématiques.
B.P. 1524 El-Mnaouer, Oran, ALGERIA.
E-mail: `bmessirdi@univ-oran.dz`
E-mail: `rahmani@univ-oran.dz`

Université Libre de Bruxelles,
Dé partement de Mathématique.
Campus Plaine ULB, CP214,
Bld du Triomphe B1050, Bruxelles, Belgique
E-mail: `asenouss@ulb.ac.be`