LICEU

Clasa a IX-a

S:L22.161. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Arătaţi că

$$\left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leqslant \frac{|f(x)| + |f(y)|}{2}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R},$$

dacă şi numai dacă $b^2 - 4ac \leqslant 0$.

* * *

Clasa a X-a

S:L22.174. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât funcţia $\min(f, g)$ este injectivă, iar $\max(f, g)$ este surjectivă. Arătaţi că $f = g$.

* * *

Clasa a XI-a

S:L22.188. Fie $p \in \mathbb{R}^*$. Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y) + f(z) - 2(xy + yz + zx) - p,$$

oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Traian Tămâian, Carei

Clasa a XII-a

S:L22.200. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ şi $x^2 = 0$, atunci $x = 0$. Dacă $a, b, c \in A$ şi $a = ab$, $b = bc$, $c = ca$, arătaţi că $a = b = c$.

Mihai Opincariu, Brad