LICEU

Clasa a IX-a

S:L21.42. Se consideră în plan punctele A, B, C, D, oricare trei necoliniare, iar H_1, H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor $\triangle ABC$, respectiv $\triangle ABD$. Arătaţi că punctele A, B, C, D sunt conciclice dacă şi numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{CD}$.

* * *

Clasa a X-a

S:L21.60. Fie 50 de ceasuri cu limbi aşezate pe o masă. Se ştie că toate ceasurile indică ora exactă. Arătaţi că, în cel puţin jumătate din timpul unei zile, suma distanţelor de la centrul mesei la centrele ceasurilor este mai mică decât suma distanţelor de la centrul mesei la vârfurile minutarelor.

* * *

Clasa a XI-a

S:L21.68. Fie o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$, cu $a_{ij} = 1$, dacă $i|j$, şi $a_{ij} = 0$ în rest. Fie p număr natural dat. Aflaţi cea mai mare valoare a lui n astfel încât să existe exact p coloane cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare dintre ele este un număr impar.

* * *

Clasa a XII-a

S:L21.80. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu n elemente.

i) Arătaţi că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul elementelor de ordin cel mult 2;

ii) (Teorema lui *Wilson*.) Considerând grupul $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$, arătaţi că dacă p este număr prim, atunci $p | [(p-1)! + 1]$. Demonstraţi şi afirmaţia reciprocă.

* * *