

## LICEU

### Clasa a IX-a

**S:L18.202.** Se consideră triunghiul  $ABC$  înscris în cercul  $C(O)$ . Notăm cu  $D$  și  $E$  intersecțiile a două ceviane izogonale cu cercul  $C(O)$ . Punctele  $S, T$  aflate pe cerc sunt astfel încât  $A$  este mijlocul arcului  $ST$ . Dacă  $DT$  și  $AC$  se taie în  $N$  iar  $AB$  și  $ES$  se taie în  $P$ , demonstrați că triunghiurile  $AEN$  și  $ADP$  sunt echivalente (Două ceviane sunt izogonale dacă sunt simetrice față de bisectoarea unghiului).

În legătură cu problema **14334** din G.M.-B nr. 4/2012.

*Petru Braica, Satu Mare*

**S:L18.208.** Aflați numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  care verifică pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n$  relația  $a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + ka_k^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2$ .

*Adrian Bud, Negrești Oaș*

### Clasa a X-a

**S:L18.213.** Se consideră un triunghi oarecare  $ABC$ . Pe laturile acestuia se construiesc pentagoanele regulate  $ABSC_1M$ ,  $BCQA_1R$  și respectiv  $CANB_1P$  spre exteriorul triunghiului. Demonstrați că mediatoarele segmentelor  $[MN]$ ,  $[PQ]$  și  $[SR]$  sunt concurente.

*Petru Braica, Satu Mare*

**S:L18.214.** Aflați funcțiile strict crescătoare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $f(2x + y + f(y)) = 2(f(x) + f(y))$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , iar  $f(0) = 0$ .

Generalizare:  $f((n + 1)x + y + f(ny)) = (n + 1)(f(x) + f(y))$ .

*Adrian Bud, Negrești Oaș*

### Clasa a XI-a

**S:L18.227.** Dacă  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ , arătați că

$$\det(A^2 + B^2) \geq \det(AB - BA).$$

*Ovidiu Pop, Satu Mare*

**S:L18.228.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir definit prin:  $a_1 = k^2 + 1, k \in \mathbb{N}^*, k$  dat și  $(2k^2 + 2k + 1)a_{n+1} = a_n^2 + (k^2 + k)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit.

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - k^2)$ .

*Traian Tămâian, Carei*

### Clasa a XII-a

**S:L18.233.** Să se determine funcția derivabilă  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  care îndeplinește condițiile  $2xf'(x) + f(x) = 2x\sqrt{xe^x}, \forall x \in [1, \infty)$  și  $f(1) = 0$ .

*Călin Popescu, Satu Mare*

**S:L18.238.** Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e x^n \cdot (\ln x - 1)^n \cdot \ln x dx$ .

*Traian Tămâian, Carei*