

LICEU

Clasa a IX-a ¹⁾

S:L18.122. Determinați perechile de numere întregi care verifică relația

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y + xy^2 + 16.$$

Nicolae Victor și Petre Simion, București

S:L18.130. Fie ABC un triunghi cu $AC > AB$. Considerăm punctele M pe AB și N pe AC , diferite de mijloacele acestor segmente, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA}$. Arătați că dacă MN trece prin mijlocul bisectoarei AD a triunghiului ABC , atunci D este pe BC .

Adrian Bud, Negrești-Oaș

Clasa a X-a

S:L18.134. Fie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definită recurent prin

$$f(2) = \frac{3}{2}, \quad 2f(n+1) = f(n) + n + 1.$$

Determinați punctele de pe graficul funcției $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(n) = \log_2(1 + f(n))$, care au coordonate întregi.

Cristian Moanță, Craiova

S:L18.139. Fie n un număr natural nenul diferit de 2 și numerele complexe a, b, c , de modul 1, distincte oricare două, care verifică relația $a^n + b^n + c^n = abc$. Arătați că afixele acestora determină un triunghi echilateral sau dreptunghic.

Nicolae Papacu, Slobozia

Clasa a XI-a

S:L18.147. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, cu proprietatea $AB = 20A + 18B$. Arătați că $\det(2A^2 + 2B^2 + 3A + 3B + 9) \geq 0$.

Mihaela Berindeanu, București

S:L18.150. Câte puncte de nederivabilitate are funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |1 - |1 - |1 - \dots - |1 - x^2|| \dots|$, unde avem în dreapta n bare de modul ?

Roxana Goga, București

¹⁾Problemele de la această rubrică au făcut obiectul listei scurte a Olimpiadei Naționale de Matematică, 2018, Satu Mare

Clasa a XII-a

S:L18.156. Fie G un grup ce are un număr finit de subgrupuri. Arătați că G este finit.

* * *

S:L18.158. Pentru ce valori reale p există și este finită limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}?$$

* * *