

LICEU

Clasa a IX-a

S:L18.81. Se consideră punctul P în interiorul triunghiului ABD din dreptunghiul $ABCD$, cu $AB > CD$. Dacă M se află pe segmentul BD astfel încât $PM \perp BD$, să se arate că $PA^2 + PM^2 > \frac{1}{4}AD^2$.

Daniela Stănică și Nicolae Stănică, Brăila

S:L18.83. Există vreo progresie geometrică de numere reale astfel încât, pentru orice număr natural nenul m , în intervalul $\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$ să existe termeni ai progresiei? Dar dacă progresia este aritmetică?

Dragoș Manea, student, București

Clasa a X-a

S:L18.92. Fie z, v, w , numere complexe, și $a \geq b \geq c \geq 0$, numere reale, cu $a + b + c = 1$ și $|az + bv + cw| \geq 1$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $|z|$, $\frac{|z+w|}{2}$, $\frac{|z+v+w|}{3}$ este cel puțin egal cu 1.

Roxana Goga, București

S:L18.97. Fie $ABCD$ un trapez cu laturile paralele AB și CD . În semiplanul determinat de dreapta AB și punctul C , construim triunghiul echilateral SAB , iar în semiplanul determinat de dreapta CD și punctul A construim triunghiul echilateral RDC . Demonstrați că dreptele RS , AC și BD sunt concurente.

Nicolae Stănică, Brăila

Clasa a XI-a

S:L18.104. Să se determine toate funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, strict monotone, cu proprietatea că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ avem:

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{x} + \frac{f(x)f(y)}{y}.$$

Dragoș Manea, student, București

S:L18.105. Arătați că dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\det A = 2$, atunci

$$\det(A^2 + xA + I_2) \geq 1 - \frac{1}{8}(\operatorname{tr} A)^2.$$

Mihaela Berindeanu, București

Clasa a XII-a

S:L18.111. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție astfel încât $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Aflați asimptotele funcției f .

Dragoș Manea, student, București

S:L18.117. Fie $M = \{a^2 + 41b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că mulțimea M , cu operația de înmulțire, este monoid și determinați elementele inversabile.

b) Este adevărat că $2018 \in M$?

Aurel Doboșan, Lugoj