

LICEU

Clasa a IX-a

S:L18.284. Într-un pătrat de latură 1 sunt desenate câteva cercuri cu suma lungimilor egală cu 18. Arătați că se poate duce o dreaptă care secționează cel mult 5 cercuri și o dreaptă care secționează cel puțin 6 cercuri.

Gheorghe Șimon, student, Cluj-Napoca

S:L18.289. Găsiți cea mai mare valoare a raportului dintre un număr natural N , a cărui scriere în baza 10 are $n + 1$ cifre, și suma cifrelor sale. Determinați toate numerele naturale pentru care acest raport este maxim.

Dorel I. Duca, Cluj-Napoca

Clasa a X-a

S:L18.294. O alee de $1 \times n$ se pavează cu plăci 1×1 de culorile roșu, galben, albastru. Câte astfel de pavaje conțin un număr par de plăci roșii?

Vasile Pop, Cluj-Napoca

S:L18.298. Considerăm în planul complex discurile

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 2\} \text{ și } D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2i| \leq 1\}.$$

Determinați mulțimea în care se găsește vârful C al unui triunghi echilateral ABC cu $A \in D_1$ și $B \in D_2$.

Roxana Goga, București

Clasa a XI-a

S:L18.302. Fie A, B două matrice pătratice cu elemente numere reale, iar $C = I_n + AB$. Arătați că dacă $B^t C^t = A^t$ atunci $BC = A$.

* * *

S:L18.310. Arătați că nu există funcții $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ crescătoare sau descrescătoare cu proprietatea că $f(\mathbb{Q} \cap [a, b]) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și

$$f((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b]) \subseteq \mathbb{Q}$$

Gheorghe Șimon, student, Cluj-Napoca

Clasa a XII-a

S:L18.313. Fie $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ o funcție astfel încât

$$f(x) \leq 2 \int_0^x f(t) dt.$$

Arătați că $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [0; 1]$.

* * *

S:L18.319. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{pn + r} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2pk - 2p + r}{2pn},$$

atunci când $0 < r < 2p$.

Dorel I. Duca, Cluj-Napoca