LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.175. Fie A o mulţime cu 2017 elemente şi $f : A \to A$, o funcţie cu proprietatea $f(f(f(x))) = x$, pentru orice $x \in A$. Demonstraţi că există $x_0 \in A$ cu $f(x_0) = x_0$.

Leonard Giugiuc, Drobeta-Turnu Severin

S:L17.178. Fie ABC un triunghi cu toate laturile de lungimi diferite. Demonstraţi că dreapta IG intersectează segmentele (AB) şi (AC) dacă şi numai dacă există $t \in (0, 1)$ cu proprietatea că $a = tb + (1 - t)c$, unde a, b, c sunt laturile triunghiului.

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

Clasa a X-a

S:L17.187. Fie M, N, P, Q, R, S respectiv, mijloacele laturilor AB, BC, AF, DE, CD, EF ale hexagonului convex $ABCDEF$. Dacă G_1, G_2, G_3, G_4 sunt, respectiv, centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, BCD, QRS, AEF, arătaţi că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Traian Tămâian, Carei

S:L17.190. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere cu proprietăţile: $a_1 = 2$ şi, pentru orice $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{p_n q_n}$, cu p_n şi q_n numere naturale prime între ele, astfel ca $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

Determinaţi $a_{n+1} + \dfrac{1}{a_n}$, pentru $n \geq 1$.

* * *

Clasa a XI-a

S:L17.192. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(x_n + 1)^2 + 1}$, pentru orice număr natural nenul n. Să se studieze convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(n^k x_n)_{n\geq 1}$, unde $k > 0$.

Luigi-Ionuţ Catană, Bucureşti

S:L17.194. a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că, pentru orice $x \in \mathbb{C}$:

$$\det(A - xI_2) = x^2 - (\operatorname{Tr} A)x + \det A.$$

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\operatorname{Tr} A = 2$ şi $\det A = 3$, demonstraţi că

$$\det\left(A^2 + I_2\right) + \det\left(A^2 + 3I_2\right) = 20.$$

Traian Tămâian, Carei

Clasa a XII-a

S:L17.202. Fie G o mulţime nevidă. Pe această mulţime se consideră legea de compoziţie „$\cdot$" şi operaţia unară $x \mapsto \overline{x}$. Dacă

$$a \cdot (b \cdot c) = d \cdot (e \cdot c) \Rightarrow b = (\overline{a} \cdot d) \cdot e, \quad \forall a, b, c, d, e \in G,$$

demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup.

Vlad Mihaly, Cluj-Napoca

S:L17.206. Fie $k, p \geq 2$, numere naturale. Să se arate că

$$\int_0^1 \sqrt[k]{1 - x^p}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt[p]{1 - x^k}\, \mathrm{d}x.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca