

LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.137. Arătați că media geometrică a două numere naturale ce diferă cu două unități poate fi aproximată cu cel mai mic dintre ele la care adunăm $1/2$ iar eroarea făcută este mai mică decât $\frac{1}{8m}$, unde m este cel mai mic dintre numerele date.

Roxana Goga, București

S:L17.140. Determinați maximul expresiei

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{b + 2c + 3a},$$

unde a, b, c sunt strict pozitive și $2a + 12b + 9c = 1$.

* * *

Clasa a X-a

S:L17.143. Arătați că $\cos(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2})$ nu este număr rațional.

* * *

S:L17.147. Un triunghi echilateral are două dintre vârfuri în câte un inel circular cu razele 2 și 1 fiecare, inelele fiind disjuncte. Unde se poate afla cel de al treilea vârf al triunghiului?

G. Rene, București

Clasa a XI-a

S:L17.156. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea: pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care șirul $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge, rezultă că $(x_n)_{n \geq 0}$ converge.

Demonstrați că dacă funcția are proprietatea lui *Darboux*, atunci este continuă.

* * *

S:L17.158. Fie $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Arătați că dacă pentru orice $x \in (0, 1)$ limita

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{Q}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

există și este finită, atunci f este derivabilă.

* * *

Clasa a XII-a

S:L17.166. Arătați că un polinom de forma

$$f = aX^4 + bX^3 + 4X^2 + 3X + 1$$

cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, nu are toate rădăcinile reale.

* * *

S:L17.169. Câte matrice inversabile sunt în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$?

* * *