LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.42. Se dă ecuaţia $3mx^2 - 3x + m - 2 = 0$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că nu există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluţiile ecuaţiei să fie întregi şi să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât o soluţie să fie întreagă.

b) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are ambele soluţii întregi.

Dan Negulescu, Brăila

S:L17.47. Fie triunghiul ABC, cu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$, iar punctele D, E şi F sunt mijloacele laturilor BC, AD, respectiv AE.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BE} = \dfrac{\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{u}}{8}$ şi $\overrightarrow{FC} = \dfrac{7\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}}{8}$.

b) Să se demonstreze că $\dfrac{7}{2}\overrightarrow{BE} + \dfrac{5}{2}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{FC}$.

* * *

Clasa a X-a

S:L17.58. Legea lui Bedford (fizician american, 1883-1948) afirmă că aproximativ 30% dintre datele numerice ce se referă la situaţii din viaţa reală, încep cu cifra 1. Presupunând că majoritatea fenomenelor sociale şi din natură au o evoluţie exponenţială, de tipul $f(t) = a^t$ unde t este timpul, iar $a > 0$, $a \neq 1$, justificaţi legea folosind proprietăţile funcţiei logaritmice.

G. Rene, Bucureşti

S:L17.60. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x + 2016^3} + \sqrt{x} = \left(\sqrt{2017} + 1\right)^3$. Soluţia ecuaţiei este număr natural? Justificaţi răspunsul.

Andreea Maria Popa, studentă, Universitatea din Bucureşti

Clasa a XI-a

S:L17.63. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$. Dacă

$$\lim_{n\to\infty}(x_{3n} - x_{3n+1}) = \lim_{n\to\infty}(x_{3n+1} - x_{3n+2}),$$

există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$?

* * *

S:L17.65. Fie numărul $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietăţile $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ şi $(A+B)^4 = A^4 + B^4$. Arătaţi că $(AB)^2 = O_n$.

* * *

Clasa a XII-a

S:L17.72. Calculaţi $\displaystyle\int \frac{2017^{nx} - 2017^{x}}{(1 + 2017^{x})^{n+1}}\,\mathrm{d}x$, unde $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geqslant 2$ şi $x \in \mathbb{R}$.

$* * *$

S:L17.80. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi H un subgrup propriu al său, cu proprietatea că există $a \in G \setminus H$ astfel încât $H \cup \left\{a, a^{-1}\right\}$ este subgrup în G. Arătaţi că $\operatorname{ord}(a) = 4$.

$* * *$