LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.125. Se consideră paralelogramul $ABCD$ astfel încât $DC > AD$ şi unghiul $\sphericalangle ADC$ are 60°. Dacă punctele O şi P sunt în interiorul paralelogramului astfel încât unghiurile $\sphericalangle ODA, \sphericalangle OBA$ au fiecare 20° şi unghiurile $\sphericalangle PBC$, $\sphericalangle PDC$ au câte 10°, arătaţi că $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OCP$.

Smaranda Ionescu, Slobozia

S:L16.129. Arătaţi că $\sum \frac{a}{2a+3b+4c} \geq \frac{1}{3}$, unde suma este ciclică în $a, b, c > 0$.

Aurel Doboşan, Lugoj

Clasa a X-a

S:L16.132. Fie funcţia $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x + 2 + \sqrt{16 - x^2}$. Să se determine imaginea funcţiei f.

Dorina Miana Barta, Timişoara

S:L16.139 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_{2n} \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $a_1a_2 = a_3a_4 = \cdots = a_{2n-1}a_{2n}$. Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{1 + a_k}} \leq n\sqrt{2}.$$

Traian Tămîian, Satu Mare

Clasa a XI-a

S:L16.143. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $A = O_2$.

2) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(A \cdot A^t)^n = O_2$.

Ovidiu Buică, Ciacova

S:L16.150. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $f(0) - 0$, o funcţie continuă cu proprietatea că $f(x + f^{2016}(x)) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$. Arătaţi că f este funcţia nulă.

Florin Stănescu

Clasa a XII-a

S:L16.152. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$ şi $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{1-x^n}}\mathrm{d}x$. Arătaţi că există $\lim\limits_{a \to 1} I_n(a) = I_n$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$.

G. Rene, Bucureşti

S:L16.159. Pentru un grup G notăm cu $Z(G) = \{x \in G | xy = yx$, pentru orice $y \in G\}$ (centrul grupului). Arătaţi că dacă $x, y \in G$ sunt astfel încât $xy \in Z(G)$, atunci x şi y comută.

* * *