

## LICEU

### Clasa a IX-a

**S:L16.325.** Arătați că  $\sqrt[100]{2^{100} + 3^{100}}$  are în scrierea zecimală cel puțin șase zerouri după partea întreagă.

*Roxana Goga, București*

**S:L16.330.** a) De câte semicercuri deschise (fără capete) este nevoie pentru a acoperi complet un cerc?

b) De câte semisfere deschise este nevoie pentru a acoperi o sferă?

*Bogdan Maxim, Botoșani*

### Clasa a X-a

**S:L16.336.** Arătați că pentru trei numere complexe  $z_1, z_2, z_3$  avem  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , dacă și numai dacă pentru orice numere complexe  $a_1, a_2, a_3$  cu modulele în  $[0, 1]$  avem  $\left| \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} + \frac{a_3}{z_3} \right| \leq 3$  și  $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| \leq 3$ . Generalizare.

*Adrian Boțan, Botoșani*

**S:L16.340.** Care este numărul maxim de termeni de forma  $\sqrt{x}$  cu  $x \in \mathbb{N}^*$  și  $\sqrt{x} \notin \mathbb{N}$ , pe care îi poate avea o progresie aritmetică?

*Nicoleta A. Ionescu-Mazilu, București*

### Clasa a XI-a

**S:L16.343.** Determinați funcțiile monotone  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care îndeplinesc condiția

$$\inf\{f(f(t)) \mid t > x\} \leq f(x) \leq \sup\{f(f(t)) \mid t < x\}.$$

*Petru Todor, Sebeș*

**S:L16.350.** Fie  $a > 2$  și  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $f(x) = 0$  pentru  $x$  irațional și  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^a}$  pentru  $(p, q) = 1, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că  $f$  este derivabilă pe mulțimile  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ , unde  $d \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ .

*G. Rene, București*

Clasa a XII-a

**S:L16.355.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup în care există  $a \in F$  astfel încât pentru orice  $g \in G$  există  $n \in \mathbb{Z}^*$  cu  $ga^n = e$ . Arătați că grupul este ciclic.

\* \* \*

**S:L16.359.** Fie  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue și astfel încât  $f(x)g(x) \geq 1$  oricare ar fi  $x \in [0, 1]$ . Arătați că  $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \geq 1$ .

\* \* \*