

LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.325. Arătați că $\sqrt[100]{2^{100} + 3^{100}}$ are în scrierea zecimală cel puțin șase zerouri după partea întreagă.

Roxana Goga, București

S:L16.330. a) De câte semicercuri deschise (fără capete) este nevoie pentru a acoperi complet un cerc?

b) De câte semisfere deschise este nevoie pentru a acoperi o sferă?

Bogdan Maxim, Botoșani

Clasa a X-a

S:L16.336. Arătați că pentru trei numere complexe z_1, z_2, z_3 avem $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, dacă și numai dacă pentru orice numere complexe a_1, a_2, a_3 cu modulele în $[0, 1]$ avem $\left| \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} + \frac{a_3}{z_3} \right| \leq 3$ și $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| \leq 3$.
Generalizare.

Adrian Boțan, Botoșani

S:L16.340. Care este numărul maxim de termeni de forma \sqrt{x} cu $x \in \mathbb{N}^*$ și $\sqrt{x} \notin \mathbb{N}$, pe care îi poate avea o progresie aritmetică?

Nicoleta A. Ionescu-Mazilu, București

Clasa a XI-a

S:L16.343. Determinați funcțiile monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinesc condiția

$$\inf\{f(f(t)) \mid t > x\} \leq f(x) \leq \sup\{f(f(t)) \mid t < x\}.$$

Petru Todor, Sebeș

S:L16.350. Fie $a > 2$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = 0$ pentru x irațional și $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^a}$ pentru $(p, q) = 1, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$. Arătați că f este derivabilă pe mulțimile $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, unde $d \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.

G. Rene, București

Clasa a XII-a

S:L16.355. Fie (G, \cdot) un grup în care există $a \in F$ astfel încât pentru orice $g \in G$ există $n \in \mathbb{Z}^*$ cu $ga^n = e$. Arătați că grupul este ciclic.

* * *

S:L16.359. Fie $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue și astfel încât $f(x)g(x) \geq 1$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Arătați că $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \geq 1$.

* * *