

LICEU
Clasa a IX-a

S:L16.241. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + 2f(1 - x) = g(x).$$

Dacă g este strict crescătoare, cum este f ?

Ileana Șerban, București

S:L16.247. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că

$$|f(x) - f(y) - x + y| \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2}|x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Există funcție de gradul al doilea cu această proprietate?

Roxana Goga, București

Clasa a X-a

S:L16.257. Arătați că un triunghi ABC este echilateral dacă și numai dacă măsurile unghiurilor A, B, C , exprimate în grade sexazecimale, sunt în progresie aritmetică, iar lungimile laturilor sunt în progresie geometrică.

S:L16.260. Arătați că, pentru $n \geq 10$, $\sqrt[n]{3^n + 2^n} < 3,006$. Explicați rezultatul.

G. René, București

Clasa a XI-a

S:L16.263. Arătați că dacă $\frac{m}{n}$ este o fracție ireductibilă astfel încât $1 > \sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0$, atunci există o constantă $c > 0$ astfel ca

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{c \cdot n^4},$$

pentru orice $n \geq 1$.

S:L16.265. Studiați convergența șirului definit prin:

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{2 + 3x_n^3}{4x_n^3}, \text{ pentru } n \geq 1.$$

Care este primul n pentru care x_n dă o aproximație cu 5 zecimale exacte a limitei șirului $(x_n)_{n \geq 1}$?

Clasa a XII-a

S:L16.272. Găsiți un cadru formal prin care, cu ajutorul scrierii exponențiale a numerelor complexe, să calculați primitivele funcțiilor date de $f(x) = x^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$, unde $x \in [0, \pi]$.

S:L16.280. O comunitate rurală are, la momentul $t = 0$ al sondajului, 250 de locuitori. Populația crește în ani după legea $P'(t) = 30(1 + \sqrt{t})$.

- a) Care este populația după 20 de ani?
- b) Găsiți o formulă care să aproximeze populația după t ani.