LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.2. Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ definim funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_m(x) = 2x^2 - (m+1)x + 3m - 5$. Reprezentând în acelaşi sistem de coordonate graficele funcţiilor f_m, $m \in \mathbb{R}$, determinaţi punctele planului de coordonate care nu se află pe niciunul dintre aceste grafice.

Silviu Dilimoţ Niţă, Bucureşti

S:L16.7. Pe laturile AB şi CA ale triunghiului ABC se iau punctele M respectiv N, care le împart în rapoartele p respectiv q. Fie triunghiul echilateral ACD, cu D şi B în semiplane opuse faţă de AC. Care este raportul în care MN împarte AD?

G. Rene, Bucureşti

Clasa a X-a

S:L16.15. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile isoscele ABE, BCG, ACD, astfel încât unghiurile din A, C, D ale acestora să fie drepte. Demonstraţi că $EG \perp BD$.

Eugen Radu, Bucureşti

S:L16.17. Fie z_1, z_2 numere complexe de modul 1. Arătaţi că

$$|z_1 + z_2 - z_1 z_2| \leq \sqrt{5 + 2\mathrm{Re}(z_1 + z_2)}.$$

G. Rene, Bucureşti

Clasa a XI-a

S:L16.28. Fie $a > b > 0$. Există $k > 0$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} n^k(\sqrt[n]{a^n + b^n} - a) \in \mathbb{R}^*$?

G. Rene, Bucureşti

S:L16.30. Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comută oricare două, avem întotdeauna

$$\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \geq 0?$$

G. Rene, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L16.33. Determinaţi funcţiile continue $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, pentru care

$$\int_x^y x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Silviu Dilimoţ Niţă, Bucureşti

S:L16.39. Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este acelaşi cu numărul elementelor nilpotente. Arătaţi că dacă $x \in A$ este inversabil, atunci $1 - x$ este nilpotent.

Eugen Radu, Bucureşti