LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.207. a) Determinaţi numerele naturale y pentru care există numerele naturale prime a şi b astfel încât $a^2+b^2+(ab)^2=y^2$.

b) Demonstraţi că ecuaţia $a^2+b^2+(ab)^2=y^2$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Cristian Heuberger, Baia Mare

S:L15.210. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)$. Fie I centrul cercului înscris în acesta şi $E, K \in AC$, $F, J \in AB$, $D, L \in BC$ astfel încât $(AD$, $(BE$ şi $(CF$ sunt bisectoarele triunghiului ABC, $(IJ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AIE$, $(IK$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AIF$, iar $(IL$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BIF$. Să se arate că:

a) Punctele J, K şi L sunt coliniare.

b) $KL > KJ$.

Dana Heuberger, Baia Mare

Clasa a X-a

S:L15.211. Dacă a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi ABC, iar R şi r sunt razele cercului circumscris, respectiv a cercului înscris, triunghiului ABC, determinaţi valoarea maximă a raportului $\dfrac{R \cdot r}{ab+bc+ca}$.

Radu Pop, Vasile Ienuţaş, Baia Mare

S:L15.218. Determinaţi numerele reale strict pozitive a, b, c pentru care $a+b+c=1$ şi $a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \cdot c^{\frac{1}{c}} = (abc)^3$.

Radu Pop, Baia Mare

Clasa a XI-a

S:L15.223. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$$a_n = \sqrt{\frac{6}{2\cdot 3}} + \left(\sqrt{\frac{6}{3\cdot 5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{6}{4\cdot 7}}\right)^3 + \ldots + \left(\sqrt{\frac{6}{(n+1)(2n+1)}}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Demonstraţi că $a_n < \mathrm{e} - 1$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica, Baia Mare

S:L15.225. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(A-B)+B(A+B)=O_2$. Arătaţi că $\det\left(A^2+B^2-I_2\right) \geq 1$.

Radu Pop, Baia Mare

Clasa a XII-a

S:L15.234. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătaţi că

$$\left(A_{2p}^{2p} - 2p^2\right) \cdot \left(A_{2p+1}^{2p} - 2p^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(A_{3p-1}^{2p} - 2p^2\right) \vdots\, p^{3p} \cdot 2^p.$$

Dana Heuberger, Baia Mare

S:L15.240. a) Daţi un exemplu de funcţie bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive, este continuă în exact două puncte şi $f \circ f$ admite primitive.

b) Daţi un exemplu de funcţie bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care nu admite primitive, este continuă într-un singur punct şi $f \circ f$ admite primitive.

Gheorghe Boroica, Baia Mare