LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.324. Demonstraţi că un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$a_1 + 2a_2 + ... + na_n = \frac{n(n+1)(2a_n + a_1)}{6}, \ \forall n \geq 3.$$

Marius Perianu, Slatina

S:L15.330. Fie triunghiul ABC de ortocentru H şi A_1, B_1, C_1 simetricele lui H faţă de mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Notăm cu H_a, H_b, H_c ortocentrele triunghiurilor A_1BC, AB_1C respectiv ABC_1. Să se arate că dreptele AH_a, BH_b şi CH_c sunt concurente în centrul de greutate G al triunghiului ABC.

Marius Perianu, Slatina

Clasa a X-a

S:L15.332. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale pozitive sistemul

$$x^2 = y^{\lg z}, \quad y^2 = z^{\lg x}, \quad z^2 = x^{\lg y}.$$

S:L15.340. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x - f(x)$ este bijectivă, atunci există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x_0) = x_0$.

Marius Perianu, Slatina

Clasa a XI-a

S:L15.346. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \det\left(A^2 - A + I_2\right) = 3.$$

Arătaţi că $A^2\left(A^2 + I_2\right) = 2I_2$.

Marius Perianu, Slatina

S:L15.347. Fie A o mulţime nemărginită de numere reale cu proprietatea: $\forall\, x, y \in A \Rightarrow \dfrac{x+y}{2} \in A$. Să se arate că oricare ar fi $a \in A$, există un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset A \setminus \{a\}$ convergent la a.

Florian Dumitrel, Slatina

Clasa a XII-a

S:L15.351. Fie $G = (1, \infty)$. Determinaţi numerele reale a, b, c pentru care G este grup în raport cu legea de compoziţie

$$x * y = xy + ax + by + c.$$

Eduard Buzdugan, Slatina

S:L15.357. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordin n, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că orice element al grupului este cub perfect dacă şi numai dacă n nu este multiplu de 3.

(Notă: $x \in G$ este cub perfect dacă există $y \in G$ astfel încât $y^3 = x$).

Luigi Catană, student, Potcoava