LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.281. Determinaţi numerele reale x pentru care există n, număr natural, astfel încât $[x] = n\{x^2\}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară, a numărului real a.

G. Rene, Bucureşti

S:L15.284. Aflaţi maximul şi minimul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x^2 + 4}$.

* * *

Clasa a X-a

S:L15.292. Arătaţi că, pentru orice $a \in [0, 1]$, există o mulţime de numere naturale A_a cu proprietatea: există $n_a \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru $n \geq n_a$, avem:

$$(a - 0,0001)n \leq \operatorname{card}(A_a \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\}) \leq (a + 0,0001)n.$$

G. Rene, Bucureşti

S:L15.299. Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O şi fie M un punct în planul său. Arătaţi că $MA+MB+MC+MD = 2\sqrt{4MO^2 + 2OA^2 + 2OB^2}$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi şi M coincide cu O.

Petru Todor, Sebeş

Clasa a XI-a

S:L15.301. Arătaţi că, pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem

$$\mathrm{e}^{x-y-2z} + \mathrm{e}^{y-z-2x} + \mathrm{e}^{z-x-2y} \geq \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2y} + \mathrm{e}^{-2z}.$$

Daniel Sitaru, Turnu-Severin

S:L15.308. Arătaţi că dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au proprietatea că pentru orice rădăcină ω de ordin 4 a unităţii avem $\det(A + \omega B) = 0$, atunci pentru orice număr complex z avem $\det(A + zB) = 0$.

Nicuşor Berbecel, Orăştie

Clasa a XII-a

S:L15.319. Fie $G_n = \lim\limits_{y \to \infty} \int_0^y x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, unde $n \geq 0$. Arătaţi că:

$$G_{2k} = \frac{k!}{4^k} C_{2k}^k G_0 \quad \text{şi} \quad G_{2k+1} = \frac{k!}{2},$$

pentru orice $k \geq 0$.

S:L15.320. Folosind, eventual, semnul funcţiei

$$p(t) = t^2 G_{n-1} + 2t G_n + G_{n+1},$$

arătaţi că

$$G_n^2 < G_{n-1} G_{n+1}.$$