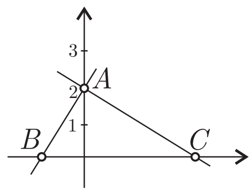
LICEU

Clasa a IX-a



S:L14.328. Graficele funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d, ac \neq 0$ sunt cele din desenul alăturat, iar punctul indicat pe axa Oy este $A(0,2)$. Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A şi are aria egală cu 4, atunci triunghiul este isoscel.

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

S:L14.329. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $x_n = 1 + (n+1) \cdot 2^{n+1} + 4^n$ este pătrat perfect.

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

Clasa a X-a

S:L14.332. Stabiliţi care dintre următoarele numere este mai mare: $a = \log_9 6$ sau $b = \log_{12} 8$.

Ovidiu Bădescu, Reşiţa

S:L14.335. Un ceas defect arată ora 12^{00}. Din acest moment acul orar se deplasează cu a° într-o oră, iar acul minutar cu b° într-o oră, unde $a, b > 0$.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, demonstraţi că există un număr natural nenul n astfel încât cele două ace ale ceasului să se suprapună exact după n ore.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ să se demonstreze că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, acele ceasului nu sunt suprapuse după n ore.

Steluţa Monea, Deva

Clasa a XI-a

S:L14.342. Orice matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ se transformă cu un pas într-o altă matrice astfel: un element de pe diagonala principală a matricei se măreşte sau se micşorează cu 1 şi orice alt element al ei se măreşte sau se micşorează cu 3. Studiaţi dacă după 2015 de astfel de paşi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se transformă într-o matrice care are determinantul egal cu 2015.

Nicolae Stăniloiu, Bocşa, Caraş-Severin

S:L14.347. Studiaţi convergenţa şirului definit prin

$$a_n = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2^x + 3^x + \ldots + n^x}{n-1} \right)^{\frac{1}{x}}, n \geq 2.$$

* * *

Clasa a XII-a

S:L14.353. Determinaţi numărul natural $n \geq 2$ pentru care mulţimea $A_n = \left\{ \widehat{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \widehat{a}^2 + \widehat{1} + \widehat{1} = \widehat{a} \right\}$ are un singur element.

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

S:L14.358. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1) = 1$. Demonstraţi că, dacă există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) \geq 2$, atunci $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg}(f(x))\mathrm{d}x > \frac{1}{2}$.

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu